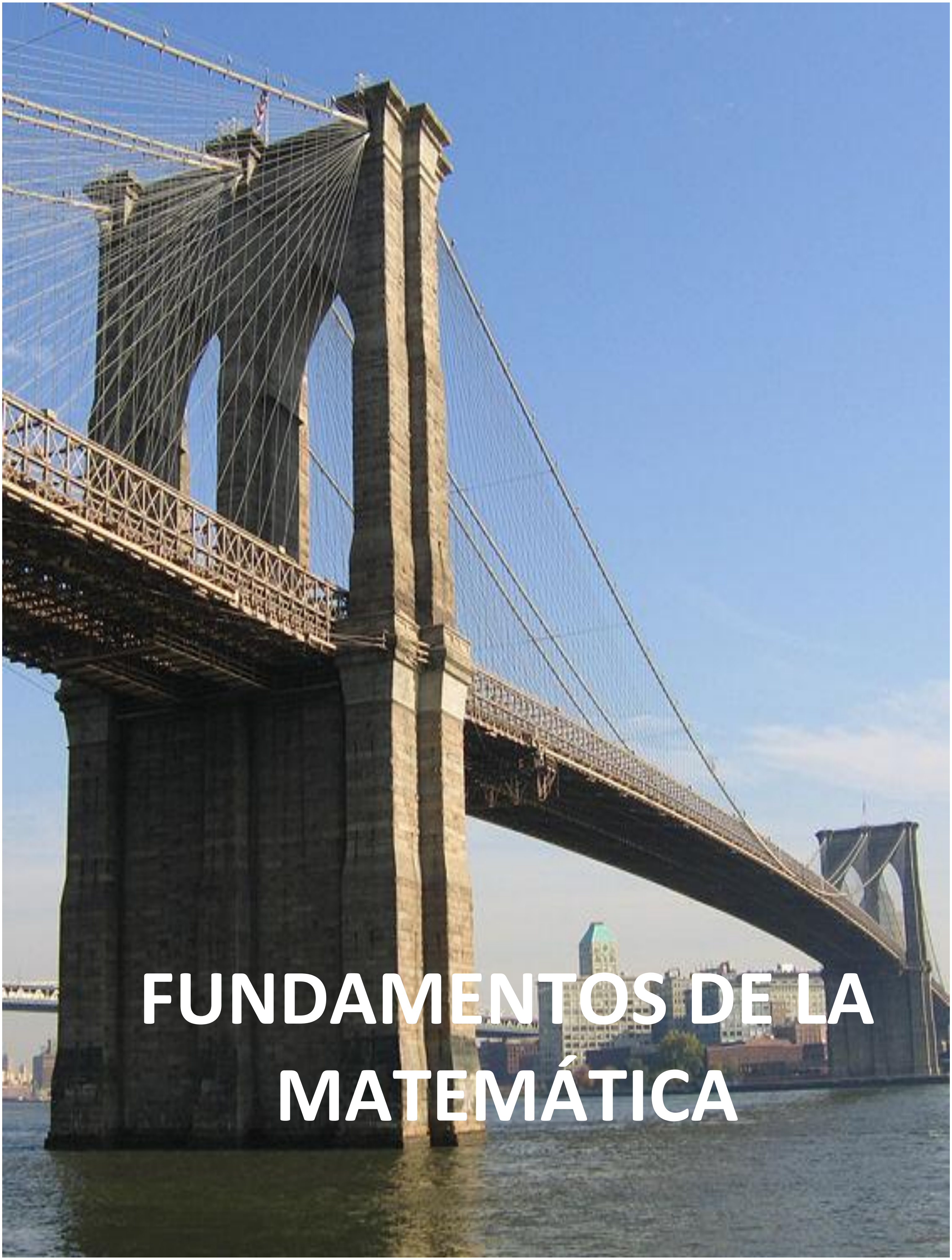


FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

CONTENIDO

Capítulo 1

LOGICA MATEMATICA

La **Lógica** es el estudio de los métodos y principios que permiten distinguir el razonamiento correcto del incorrecto. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado.

De manera general se puede afirmar que la **Lógica Matemática** surge de aplicar a la Lógica los métodos de la Matemática. La lógica matemática es, por lo tanto, la disciplina que trata de métodos de razonamiento.

En este capítulo se estudiarán los símbolos y las palabras que se usan en la Lógica Elemental y en la Matemática, su significado y aplicación.

RAZONAMIENTO LOGICO

Sin necesidad de conocimientos complicados o difíciles, se puede determinar si algo que se oye o se lee, es verdad o es falso y se considera que se ha hecho un razonamiento lógico. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias exactas y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una variedad de problemas. Ciertamente se usa en forma constante para realizar cualquier actividad.

Ejemplo

Determinar si es verdadera o es falsa cada una de las siguientes oraciones

a) La tierra es esférica. **Verdadero.**

b) Ecuador está en América del Sur. **Verdadero.**

c) Tres menos dos es igual a cuatro. **Falso.**

d) Lava el carro por favor. **No se puede determinar.**

e) Hola ¿cómo estás? **No se puede determinar.**

f) Este semestre aprobaré todas las asignaturas. **Puede ser verdad o falso.**

g) $x > y - 9$. **Depende del valor asignado a las variables** x **y** y.

PROPOSICION SIMPLE

Es una oración que puede ser verdadera o falsa pero no ambas a la vez. Del ejemplo anterior son proposiciones simples las oraciones a), b), c), f) y g), las otras no son proposiciones, pues, no se pueden determinar si son verdaderas o falsas.

Observación. No toda oración puede ser proposición simple.

VALOR DE VERDAD

Si se analiza una proposición se puede determinar si esta es verdadera o falsa, el resultado se conoce como valor de verdad.

Ejemplos

a) Ecuador pertenece a la **OTAN**.
Esta proposición tiene como valor de verdad **F.**

b) Ecuador no pertenece a la **OTAN.**
Esta proposición tiene como valor de verdad **V.**

Notación. Toda proposición simple se puede remplazar por las letras: $p, q, r, \ldots$

PROPOSICION COMPUESTA

Es la unión de dos proposiciones simples mediante los operadores lógicos: y, o, si ... entonces, si y sólo si.

Notación. Toda proposición compuesta se puede remplazar por las letras: $P, Q, R, \ldots$

Ejemplo

Determinar cuales de las siguientes oraciones son proposiciones compuestas

a) Dos más cuatro es seis **o** uno más uno es dos. **Si.**

b) Quito está en Ecuador **y** en América del Sur. **Si.**

c) ¿Quién eres y hacia dónde vas? **No.**

d) **Si** cuatro es igual a cuatro **entonces** dos no es igual a uno. **Si.**

e) La dolarización se mantiene **si y sólo si** las medidas ecónmicas son viables. **Si**

f) **O** estoy en Quito **o** estoy en Guayaquil. **Si**

h) ¡Salve! ¡Oh Patria! **No**

OPERADORES LOGICOS

Dadas dos proposiciones simples, se puede formar una proposición compuesta uniéndolas con los operadores lógicos que se describen a continuación.

CONJUNCION $(\wedge)$

Sean p y q proposiciones, la conjunción entre p y q se representa por $p \wedge q$. Se lee: "p y q". Se pueden unir dos proposiciones simples usando la conjunción "y". Se indica por medio de los siguientes símbolos: $\{\wedge \ , \ \bullet, \ \cap\}$. Se la conoce como la multiplicación lógica.

Ejemplos

Estoy el la Politécnica **y** estudio lógica matemática.

Hago deporte en Galápagos **y** trabajo en Pichincha.

Observación

Se puede usar en vez de "y":

Pero, sin embargo, aunque, no obstante.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

Si ambas proposiciones son verdaderas, la proposición compuesta es verdadera, en caso contrario es falsa. Así:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo

El carro enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería.

r : El carro enciende.

p : Tiene gasolina el tanque.

q : Tiene corriente la batería.

La representación del enunciado anterior es como sigue: $p \wedge q = r$.

De la tabla anterior el valor de $p = V$ significa que el tanque tiene gasolina, $q = V$ significa que la batería tiene corriente y $p \wedge q = r = V$ significa que el carro puede encender. Se puede notar que si $p = F$ o $q = F$ implica que el carro no tiene gasolina o que la batería no tiene corriente y que por lo tanto no puede encender.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

a) Quito esta en el Ecuador y en América del Sur

p : Quito está en el Ecuador. **V**

q : Quito está en América del Sur. **V**

Si p es verdad y q es verdad, la proposición es verdadera de acuerdo a la ley fundamental.

b) 4-2=2 y 6+1=5

p : 4-2=2. **V**

q : 6+1=5. **F**

Si p es verdad y q es falsa, la proposición es falsa de acuerdo a la ley fundamental.

DISYUNCION ($\vee$)

Sean p y q proposiciones, la disyunción entre p y q se representa por $p \vee q$. Se lee: "p o q". Se pueden unir dos proposiciones simples usando la disyunción "o". Se indica por medio de los siguientes símbolos: $\{\vee, +, \cup\}$. Se conoce como la suma lógica

Ejemplos

La Física es una ciencia **o** el Atlantis es un transbordador.

Un gobierno es democracia **o** es dictadura.

Una persona puede entrar al cine si compra un boleto **u** obtiene un pase.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

Si ambas proposiciones son falsas, la proposición compuesta es falsa. Así:

p	q	$p\vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

a) El hierro es gas **o** el oxígeno es metal

p : El hierro es gas. **F**

q : El oxígeno es metal. **F**

El valor de verdad de $p \vee q$ es **F**

b) Moviestar es una telefónica **o** Windows Vista es un hardware

p : Movistar es una telefónica. **V**

q : Windows Vista es un hardware. **F**

El valor de verdad de $p \vee q$ es **V**.

DISYUNCION EXCLUSIVA ($\underline{\vee}$)

Sean p y q proposiciones, la disyunción exclusiva entre p y q se representa por $p\underline{\vee}q$. Se lee: "**o** p **o** q", Se pueden unir dos proposiciones simples usando la disyunción exclusiva.

Ejemplos

O Saturno es un planeta **o** Venus es satélite.

O Napoleón fue emperador **o** Alfaro fue presidente.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

Si ambas proposiciones son verdaderas o son falsas, la proposición compuesta es falsa. Así:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

a) **O** el hierro es metal **o** el oxígeno es gas.

p : El hierro es metal. **V**

q : El oxígeno es gas. **V**

El valor de verdad de $p \veebar q$ es **F**.

b) **O** estoy en Quito **o** estoy en Guayaquil.

p : Estoy en Quito. **V**

q : Estoy en Guayaquil. **F**

El valor de verdad de $p \veebar q$ es **V**.

NEGACION $(\neg)$

Sea p una proposición, la negación de p se representa por $\neg p$. Se lee: "no p". De toda proposición se puede formar otra que exprese todo lo contrario, constituyéndose en una negación. Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos: {', Ø ,- }.

p	$\neg$p
F	V
V	F

Solo hay dos posibilidades y no cuatro como en los casos anteriores.

Observación. Se puede negar usando: "no", "es falso que", "no es verdad que", "no es cierto que que".

Ejemplo

Sea la proposición p : 4+3=7. Escribir la negación de p.

Solución:

a) $4+3 \neq 7$

b) Es falso que: 4+3=7

c) No es verdad que: 4+3=7

d) No es cierto que: 4+3=7

El valor de verdad de p es **V** y el de a), b), c), d) es **F** puesto que niega lo que afirma p.

CONJUNCION NEGATIVA

Sean p y q proposiciones, la conjunción negativa entre p y q se representa por $p \downarrow q$. Se lee: "no p y no q"

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

Si ambas proposiciones son falsas, la proposición compuesta es verdadera, en caso contrario es falsa. Así:

p	q	p$\downarrow$q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

CONDICIONAL ($\rightarrow$)

Sean p y q proposiciones, el condicional entre p y q se representa por $p \rightarrow q$. Se lee: "p implica q", "Si p entonces q", "p solamente si q", "p sólo si q". En la proposición $p \rightarrow q$, p es el antecedente, hipótesis o premisa; q es el consecuente, conclusión o tesis.

Ejemplos

Si inviertes en el mercado de valores **entonces** te harás rico.

La ley se aprueba **sólo** si hay mayoría en la asamblea.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

El condicional de dos proposiciones p y q es falso si p es verdadera y q es falsa, pues, una verdad no puede implicar una falsedad. Así:

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo

Se desea analizar si el candidato presidencial mintió con la afirmación: "Si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año".

Solución:

p : Salió electo Presidente de la República.

q : Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

El enunciado se puede expresar de la siguiente manera $p \rightarrow q$. La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Cuando $p = V$; significa que salió electo, y $q = V$; significa que recibieron un aumento de 50% en su sueldo, por lo tanto $p \rightarrow q = V$; significa que el candidato dijo la verdad en su campaña. Cuando $p = V$ y $q = F$ significa que $p \rightarrow q = F$; el candidato mintió, ya que salió electo y no se incrementaron los salarios. Cuando $p = F$ y $q = V$ significa que aunque no salió electo hubo un aumento del 50% en su salario, que posiblemente el suceso fue ajeno al candidato presidencial y, por lo tanto, tampoco mintió de tal forma que $p \to q = V$.

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

Solución:

a) 5=5 implica que 2+3=5

p : 5=5. **V**

q : 2+3=5. **V**

$p \to q$ es verdadera.

b) Si 2=2, entonces 1=0

p : 2=2. **V**

q : 1=0. **F**

$p \to q$ es falsa.

BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$)

Sean p y q proposiciones, el bicondicional entre p y q se representa por $p \leftrightarrow q$. Se lee: "p si y sólo si q", "p si y solamente si q", "p cuando y sólo si q".

Ejemplos

El metano es gas **si y sólo si** la ballena es mamífero.

Bolívar fue argentino **si y solamente si** Sucre fue presidente.

Es buen estudiante, si y solo si; tiene promedio de diez.

Se debe notar que los ejemplos dados son proposiciones matemáticamente correctas, pero, en el lenguaje corriente pueden resultar un poco raras.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

El bicondicional de dos proposiciones p y q es verdadero si las dos proposiciones son verdaderas o las dos son falsas Así:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

a) 2+3=5 si y solo si 4-3=0

p : 2+3=5. **V**

q : 4-3=0. **F**

$p \leftrightarrow q$ es falsa

b) 7+2=5 si y solo sí 1=0

p : 7+2=5. F

q : 1=0. F

$p \leftrightarrow q$ es verdadera

TABLAS DE VERDAD

Es una forma concisa de determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, en función de las variables p, q, r , … y de los operadores.

Ejemplo

Desarrollar la tabla de verdad de $\neg p \wedge \neg q$.

Debido a la existencia de dos variables proposicionales p y q el número de posibilidades es 2^n, donde n es el número de variables, es decir 4. Así:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Cuando las variables proposicionales p y q toman los valores de verdad F y F, se puede apreciar que la proposición resultante es verdadera.

ORDEN DE LOS OPERADORES

Es necesario conocer el orden en que se desarrolla la tabla de verdad. Se recomienda usar las siguientes reglas:

1. Si las proposiciones unidas por operadores están cerradas por paréntesis, hay que desarrollar en valor de verdad de los paréntesis internos, como en Álgebra.
2. Si una proposición compuesta está unida por comas (,) se debe desarrollar primero lo que está antes y después de la "coma" antes de unir las proposiciones simples con el operador principal.
3. Si no hay paréntesis, se debe desarrollar la tabla de verdad en orden de acuerdo a la jerarquía de los operadores, esto es, $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$. Puesto que la conjunción y la disyunción tienen igual jerarquía, se deberá establecer cual va a predominar.
4. Si no hay "comas" ni paréntesis se debe especificar el operador que va a predominar, con lo cual no entraría en vigencia la regla 3.

Ejemplo

Encontrar el valor de verdad de la disyunción $p \wedge q \vee q \rightarrow p$

Solución:

Usando paréntesis

$(p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$

p	q	(p	$\wedge$	q)	$\vee$	(q	$\rightarrow$	p)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F	V	F

Ejemplo

Desarrollar la tabla de verdad de la siguiente conjunción $(p \vee q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$

ALGUNAS EQUIVALENCIAS LÓGICAS

1. $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	**4.** $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	**7.** $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$
2. $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	**5.** $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$	**8.** $\neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$
3. $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$	**6.** $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	**9.** $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \to q$

IMPLICACION LOGICA $(\Rightarrow)$

Sean P y Q proposiciones, P implica lógicamente a Q si $P \to Q$ es una tautología.

Ejemplo

Demostrar que $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

Solución:

Se desarrolla la tabla de verdad de $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

p	q	(p	$\wedge$	q)	$\to$	(p	$\vee$	q)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F	F	F

Si hay implicación lógica.

LEYES DE LAS PROPOSICIONES

Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes, se las considera leyes y se las aplica para simplificar proposiciones grandes.

Leyes de ídem potencia

1. $P \vee P \Leftrightarrow P$
2. $P \wedge P \Leftrightarrow P$

Leyes asociativas

3. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
4. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

Leyes conmutativas

5. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

6. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

Leyes distributivas

7. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

8. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Leyes de identidad

9. $P \vee F \Leftrightarrow P$

10 $P \vee V \Leftrightarrow V$

11. $P \wedge F \Leftrightarrow F$

12. $P \wedge V \Leftrightarrow P$

Leyes de absorción

13. $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

14. $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

Leyes de complemento

15. $P \vee \neg P \Leftrightarrow V$

16. $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

17. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

18. $\neg V \Leftrightarrow F$

19. $\neg F \Leftrightarrow V$

Leyes de Morgan

20. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

21. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

Ejemplo

Simplificar $\neg(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)$

Solución:

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p)$	Ley de Morgan
$(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge p)$	Ley conmutativa
$\neg q \wedge (\neg p \vee p)$	Ley distributiva
$\neg q \wedge V$	Ley de complemento
$\neg q$	Ley de identidad

Universal ($\forall x, P(x)$)

Se lee: "Para todo(s)", "Para cada", "Todos"

Todos y cada uno de los x deben cumplir con $P(x)$.

Existencial ($\exists x, P(x)$)

Se lee: "Existe(n) un(os)", "Existe(n) algún(os)".

Por lo menos un x cumple $P(x)$.

Se puede determinar el valor de verdad de una proposición precedida de un cuantificador.

Ejemplos

1. $\exists x, x \geq 3$, es verdadero, pero, $\forall x, x \geq 3$ es falso.
2. $\forall x, |x| > 0$, es verdadero, pero, $\exists x, |x| < 0$, es falso.
3. $\exists x, x^2 = -1$, es falso, pero, $\forall x, x^2 \neq -1$ es verdadero.
4. $\forall x, x.0 = 0$, es verdadero, pero, $\exists x, x.0 \neq 0$ es falso

Observaciones

1. Dada una expresión abierta $P(x)$, la proposición $\exists! x, P(x)$ se lee "existe un único x tal que $P(x)$.
2. La proposición $\exists! x, P(x)$ es verdadera cuando el conjunto de verdad consta de exactamente un elemento.

Ejemplos

1. $\exists! x, x$ es positivo, $x^2 = 4$, es verdadero, pues este conjunto tiene un elemento que es el número 2.
2. $\exists! x, x$ es entero, $x^2 = 4$, es falso, pues este conjunto tiene dos elementos que son los números 2 y -2.

Teorema de Morgan

1. $\neg [\forall x, P(x)] \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$
2. $\neg [\exists x, P(x)] \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

METODOS DE DEMOSTRACION

Las proposiciones de una teoría matemática se clasifican en dos tipos: **axiomas** y **definiciones** que son aceptadas sin demostración y los **teoremas** que son de deducción. La demostración de un teorema es un procedimiento en el que se enlazan dos o más proposiciones utilizando reglas lógicas. El enunciado de un teorema incluye las proposiciones de partida y constituyen la **hipótesis** (H) del teorema, si partiendo de las hipótesis H se puede llegar a otra proposición llamada **tesis** (T), se debe verificar que la proposición $H \to T$ es verdadera.

Los siguientes métodos de demostración son los más usuales.

METODO DIRECTO

De acuerdo a la tabla de valores de verdad de la implicación, para demostrar que la implicación $H \to T$ es verdadera, es suficiente demostrar que, si la proposición H es verdadera, entonces T es verdadera.

Ejemplo

Demostrar que si n es un número entero impar, entonces n^2 es impar.

Demostración:

Si n es impar, entonces $n = 2m+1$, para algún m, luego

$$n^2 = (2m+1)^2$$
$$= 4m^2 + 4m + 1$$
$$= 2(2m^2 + 2m) + 1,$$

pero si, $p = (2m^2 + 2m)$

$$= 2p + 1,\ p \in Z \text{, es decir,}$$

n^2 es impar l.q.q.d.

El contra recíproco es otra forma del método directo y se basa en la equivalencia lógica $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$. Se parte de la negación de la tesis y se llega a la negación de la hipótesis, es decir $\neg T \to \neg H$. Este tipo de demostración es conocido como "supogamos que no".

REDUCCION AL ABSURDO

En este método se supone que la estructura de razonamiento $p \rightarrow q$ no es tautológica. De acuerdo a la tabla de valores de verdad de la implicación, para demostrar que la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera, es suficiente deducir de la hipótesis p es verdadera y q es falsa, que es un resultado imposible, pues son dos proposiciones contradictorias.

Ejemplo

Demostrar que $\frac{1}{0}$ no es un real.

Demostración:

Se supone que $\frac{1}{0}$ es un real, es decir, $\frac{1}{0} = a$ luego

$1 = 0.a$

$1 = 0$, es una contradicción, ya que $1 \neq 0$

Se concluye entonces que $\frac{1}{0}$ no es un real l.q.q.d.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Consta en el Capítulo 3.

CONTRAEJEMPLO

Consiste en dar un ejemplo que no cumpla con la tesis, demostrando así que la tesis es falsa. Dicho ejemplo recibe el nombre de contraejemplo. El contraejemplo pone en evidencia que existe al menos un caso en el cual la proposición es falsa.

Ejemplo

Determinar si es verdad o falso que

$\forall x \in R, x + 5 = 11$

Solución:

La proposición es falsa. Contraejemplo:

Si $x = 2$, al sustituir en la igualdad

$2 + 5 = 11$, que es un absurdo, pues

$2 + 5 \neq 11$.

Como recordatorio se presenta el siguiente cuadro:

Métodos de demostración

- Directo: Parte de la Hipótesis (H) y mediante un razonamiento válido, se llega a la Tesis (T)

  Contra recíproco: Se basa en la equivalencia lógica $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

- Indirecto: Reducción al absurdo. Combina el método directo y el contra recíproco.
  $H \wedge \neg T \Rightarrow F$

- Inducción matemática: Consta en el capítulo 3.

- Contraejemplo: Consiste en dar un ejemplo que no cumpla con la tesis demostrando que la tesis es falsa.

Síntesis

El objeto principal de este capítulo es que el estudiante aprenda el concepto de proposición, la forma en que se pueden formar proposiciones compuestas usando los conectores lógicos, representar enunciados por medio de simbología lógica, conocer los conceptos de tautología, equivalencia lógica, regla de inferencia. Realizar demostraciones de teoremas por medio del método directo y contradicción. Pero, con problemas que le sean familiares e interesantes. Se trata de que en cada uno de los subtemas participe proponiendo sus propios ejemplos y que sobre todo al final de la unidad tenga la habilidad, confianza e iniciativa para inferir posibles soluciones.

Todo enunciado puede ser planteado en términos de teoremas. Un teorema por lo general es resultado del planteamiento de un problema, este planteamiento debe tener el siguiente formato.

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots H_n) \to C$$

Se establece que $H_1, H_2, \cdots, H_n$ son hipótesis (o premisas) derivadas del mismo problema y se consideran válidas. Pero, además, deberán conectarse con el operador Y $(\wedge)$, lo cual implica que H_1 es cierta y $(\wedge)$ H_2 es verdad y $(\wedge) \cdots H_n$ también es cierta entonces $(\rightarrow)$ la conclusión C es también verdad. Para realizar la demostración formal del teorema se deberá partir de las hipótesis, y después obtener una serie de pasos que también deben ser válidos, ya que son producto de reglas de inferencia. Sin embargo, no solamente las hipótesis y las reglas de inferencia pueden aparecer en una demostración formal, sino también tautologías conocidas. En el teorema anterior cada uno de los pasos $H_1, H_2, \cdots, H_n$ son escalones que deberán alcanzarse hasta llegar a la solución final.

Lo mismo ocurre con todo tipo de problemas que se presentan en la vida, antes de llegar a la solución se deben alcanzar ciertas metas $(H_1, H_2, \cdots, H_n)$ hasta llegar al objetivo o conclusión (C). Pero una vez que se logra el objetivo deben plantearse nuevos objetivos que permitirán lograr la superación.

Dependiendo del área de interés el estudiante puede trasladar dichos conocimientos de tal manera que le ayuden a entender y resolver otro tipo de problemas. En el caso de la computación cada línea de un programa se obtiene inconcientemente aplicando una regla de inferencia y por lo tanto cada instrucción tiene su orden en que debe ir colocada, si se cambia esa línea seguramente el resultado ya no será igual. Pero, hay tantas formas de resolver un problema por medio de un programa como estudiantes distintos tenga una clase.

Una demostración formal equivale a relacionar esquemas para formar estructuras cognitivas. Sí el estudiante sabe inferir soluciones lógicas, estará en condiciones de resolver todo tipo de problemas.

Uno de los objetivos principales del constructivismo, es la cimentación del conocimiento. El tema de lógica matemática, se presta para que el estudiante pueda ejecutar relacionamientos entre las distintas proposiciones, esto permite crear nuevas formas de resolver problemas en distintas ramas: matemática, física y química, pero, también en las ciencias sociales y por supuesto en cualquier problema de la vida real. Porque al enfrentar un problema, se manipula la información por medio de reglas de inferencia que, aunque no estén escritas, se deben respetar. Cada vez que se hace una actividad se emplea la lógica para ejecutarla, quizá algunos realizan dicha actividad por caminos más cortos, otros realizan recorridos más largos, pero al fin de cuentas lo que importa es llegar al resultado. Si la persona adquiere confianza para crear e innovar su estructura cognitiva seguramente va a crecer.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Elaborar la tabla de verdad de
$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

2. Si se conoce que $\neg P \downarrow (S \to R)$ es una tautología, determinar el valor de verdad de $P \underline{\vee} (\neg S \to \neg R)$.

3. Simplificar la siguiente proposición
$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \to p$

4. Simplificar la siguiente proposición

$\neg p \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$

5. Simplificar la siguiente proposición

$[\neg(\neg p \veebar q) \wedge \neg(p \vee \neg q)] \vee (p \vee q)$

6. Demostrar la siguiente equivalencia lógica usando el álgebra de proposiciones

$(\neg p \leftrightarrow q) \veebar p \Leftrightarrow q$

7. Muestre si el razonamiento es válido:

Si estudio, no reprobaré Fundamentos de la Matemática. Si no juego básquet, entonces estudio. Pero reprobaré Fundamentos de la Matemática. Por lo tanto, jugué básquet.

8. Muestre si el razonamiento es válido:

   Si trabajo, no puedo estudiar en la EPN. O trabajo o apruebo Fundamentos de la Matemática. Aprobé Fundamentos de la Matemática. Por lo tanto, estudié.

9. ¿Es valido el siguiente argumento?.

   Si usted invierte en el mercado de valores, entonces se hará rico.

   Si usted se hace usted rico, entonces será feliz.

   Si usted invierte en el mercado de valores, entonces será feliz.

10. Dadas las premisas

$I \to T \downarrow P$

$S \to T$

Demostrar: $I \to S \downarrow T$

11. Dadas las premisas

$\neg q \to \neg p$

$r \vee p$

$r \to s$

$\neg s$

Demostrar: q

12. Dadas las premisas

$\neg(r \underline{\vee} s)$

$\neg s \vee (q \wedge \neg s)$

$r \rightarrow (s \rightarrow \neg p)$

Demostrar: $r \rightarrow \neg p$

13. Dadas las premisas

$\neg p \underline{\vee} (r \rightarrow \neg q)$

$\neg s \vee r$

$\neg(p \rightarrow \neg q)$

Demostrar: $\neg s$

14. Dadas las premisas

$p \underline{\vee} q$

$\neg(r \wedge \neg q)$

$\neg(\neg p \wedge q)$

Demostrar: $\neg(q \wedge r)$

15. Dadas las premisas

$p \downarrow \neg q$

$\neg r \rightarrow p$

$r \leftrightarrow s$

Demostrar: $\neg(q \rightarrow \neg s)$

16. Dadas las premisas

$\neg(p \wedge q) \to p$

$(p \wedge q) \to r$

$q \to \neg r$

Demostrar: $\neg q$

17. Dadas las premisas

$(p \veebar \neg q) \to \neg p$

$q \vee (r \wedge s)$

$r \downarrow s$

Demostrar: $\neg p \wedge q$

18. Dadas las premisas

$p \to (q \to r)$

$\neg(r \wedge s) \wedge (\neg r \vee s)$

$q \wedge t$

Demostrar: $\neg p \wedge t$

19. Dadas las siguientes proposiciones, indicar su valor de verdad y escribir su negación.

a) $\exists x \in N, x^2 = \dfrac{1}{4}$

b) $\forall n \in N, 2n$ es un número par.

c) $\exists n \in N, \forall m \in N : n + m = m.$

Capítulo 2

CONJUNTOS

DEFINICION

Conjunto es una colección de objetos bien definidos. A estos objetos se los llama elementos del conjunto.

Ejemplos

Las ciudades capitales de provincia del Ecuador.

Los paquetes de software

Las letras del alfabeto.

Las operadoras de telefonía celular

Notación

A los conjuntos se los representa con cualquiera de las letras mayúsculas:

A, B, C, …,X, Y, Z

Alos elementos se los representa con cualquiera de las letras minúsculas:

a, b, c,… ,x, y, z

CARACTERIZACION

Existen dos formas de caracterizar un conjunto:

1) **Por extensión:** Indicando todos y cada uno de los elementos del conjunto.

Por ejemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$ El conjunto formado por los elementos a, b, c, d.

$B = \{1,2,3,4\}$ El conjunto formado por los elementos 1, 2, 3, 4.

2) **Por comprensión:** Indicando las propiedades que deben reunir los elementos que forman parte del conjunto.

Por ejemplo:

$C = \{x\ :\ x \text{ son las letras del alfabeto}\}$

$D = \{x : 1 \leq \text{x} \leq 10\}$

PERTENENCIA ($\in$)

Todos los elementos que forman parte de un conjunto se dice que le pertenecen

Ejemplo

En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se dice que $a \in A,\ b \in A,\ c \in A,\ d \in A$.

Ejemplo

Determinar si los elementos 2, 1, 3, 4, 5, 6 pertenecen al siguiente conjunto

$B = \{x : x \text{ es impar}\}$

$2 \notin B, 4 \notin B, 6 \notin B, 1 \in B, 3 \in B, 5 \in B$

CONJUNTO FINITO

Es aquel conjunto que tiene un determinado número de elementos

Ejemplos

$A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$

$B = \{1,2,3,\ldots,1'000.000\}$

$C = \{x : \text{x es número natural y menor que } 10.000\}$

CONJUNTO INFINITO

Es aquel conjunto que tiene un número indeterminado de elementos

Ejemplos

$A = \{x : \text{x es número par y positivo}\}$

$B = \{\ldots,-8,-6,-4,-2\}$

$N = \{n\ :\ n \text{ es número entero positivo}\}$

CONJUNTO VACIO (Ø)

Es aquel conjunto que no tiene elementos.

Ejemplo

Determinar si el conjunto dado es vacío: $A = \{x : x^2 = 4 \wedge x \text{ es impar}\}$

Solución:

No existen elementos impares cuyos cuadrados sean cuatro

Por lo tanto $A = \{\ \} = \varnothing$

SUBCONJUNTOS ($\subseteq$)

Si todos los elementos de un conjunto A son elementos de un conjunto B entonces "A es subconjunto de B" y se representa así:

$A \subseteq B$

Ejemplo

Determinar la relación que existe entre los siguientes conjuntos

$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Solución

$A \subseteq B$

$B \supseteq A$ $\qquad$ "B es súper conjunto de A"

Ejemplo

Determinar la relación que existe entre los siguientes conjuntos

$E = \{x : \text{x es par}\}$ $\qquad$ $F = \{2, 4, 6, 1\}$

Solución

$2 \in E, 4 \in E, 6 \in E, 1 \notin E$

Por lo tanto F no es subconjunto de E.

Observaciones

1. Basta que un solo elemento no sea parte de otro conjunto para que no exista relación de subconjuntos.
2. El conjunto vacío se considera subconjunto de cualquier conjunto.

IGUALDAD

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tiene los mismos elementos. Es decir, ambos conjuntos se contienen mutuamnente. Simbólicamente:

$$A = B \leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

Usando las definiciones y las propiedades de la lógica proposicional se tiene que:

$$A = B \leftrightarrow \forall x[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $B = \{4, 3, 2, 1\}$

Determinar si $A = B$

Solución

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$

SUBCONJUNTO PROPIO

Un conjunto A es subconjunto propio de un conjunto B si $A \subset B \wedge A \neq B$.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{a, b, c\}$ $\qquad$ $B = \{a, d, c, b\}$

Determinar si el conjunto A es subconjunto propio del conjunto B

Solución

$A \subset B \wedge A \neq B \rightarrow$ A es subconjunto propio de B

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{d, c, f\}$ $\qquad$ $B = \{c, f, d\}$

Determinar que clase de subconjuntos son A y B

Solución

$A \subseteq B$ "A es subconjunto de B"

Observación

A los subconjuntos propios se los denominará simplemente subconjuntos a menos de que se afirme lo contrario.

COMPARACION DE CONJUNTOS

Dos conjuntos son comparables si cualquiera de ellos es subconjunto del otro, esto es

$A \subset B \vee B \subset A \rightarrow A \wedge B$ son comparables

$A \not\subset B \vee B \not\subset A \rightarrow A \wedge B$ no son comparables

PARTES DE UN CONJUNTO

Un conjunto puede ser elemento de otro conjunto.

Ejemplo

$A = \{5, \{6, 7\}, 8, 9\}$

$\{6, 7\}$ se llama elemento conjunto

El conjunto de **partes de un conjunto** está formado por todos los subconjuntos que pueden formarse a partir del conjunto A. El símbolo que se utiliza para este conjunto es $\wp(A)$ y se lo llama también conjunto potencia $\left(2^A\right)$. El conjunto vacío forma parte de $\wp(A)$.

Ejemplo

Si $A = \{1,3\}$, $\wp(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{\ \}\}$, o también $\wp(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{\ \}, A\}$.

CONJUNTO UNIVERSO

Esta formado por todos los elementos que pertenecen a otros conjuntos. El conjunto universo es considerado súper conjunto de cualquiera de los otros. Se representará con las letras U o E.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{2, 3, 4, 5\}$ $\quad$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $\quad$ $C = \{8, 9, 10, 11, 12\}$

Escribir su conjunto universo.

Solución:

El conjunto universo es:

$U = \{1, 2.3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

CONJUNTOS DISJUNTOS

Dos conjuntos son disjuntos si no tienen, por lo menos, un elemento común

Ejemplo

Determinar si los conjuntos A, B y C son disjuntos

$A = \{a,\ b,\ c\}$ $\qquad B = \{b,\ e,\ d\}$ $\qquad C = \{f,\ g\}$

Solución:

A y B no son disjuntos

A y C son disjuntos

B y C son disjuntos

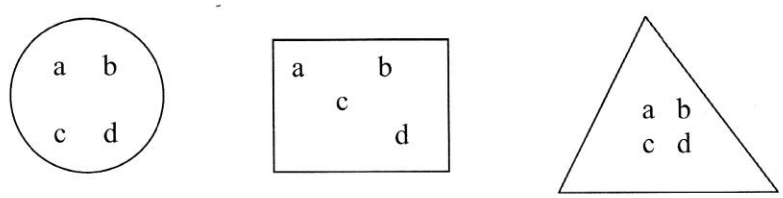
DIAGRAMAS DE VENN-EULER

Permiten representar un conjunto utilizando figuras geométricas.

Ejemplo

Representar el conjunto $A = \{a,\ d,\ c,\ b\}$ usando los diagramas de Venn-Euler

Solución:

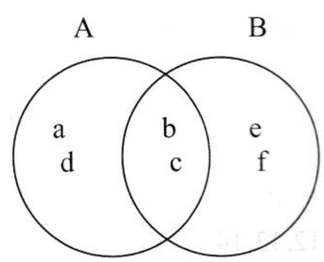


Ejemplo

Representar mediante diagramas de Venn-Euler los siguientes conjuntos

$A = \{a,\ d,\ c,\ b\}$ $\qquad B = \{b,\ c,\ e,\ f\}$

Solución:

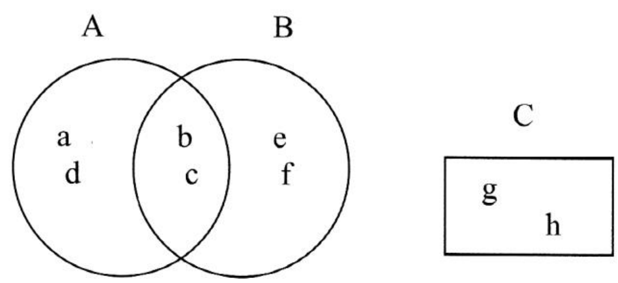


Ejemplo

Representar mediante diagramas de Venn-Euler los siguientes conjuntos

$A=\{a,\ d,\ c,\ b\}$ $B=\{b,\ c,\ e,\ f\}$ $C=\{g,\ h\}$

Solución:



DIAGRAMAS LINEALES

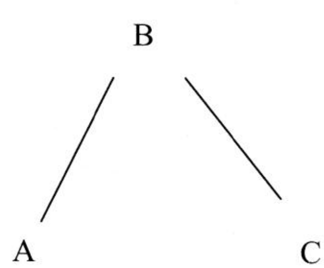
Sirven para indicar la relación de conjuntos y solo usan líneas

Ejemplo

Representar los siguientes conjuntos mediante diagramas lineales

$A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $C=\{5,6,7,8\}$

Solución:



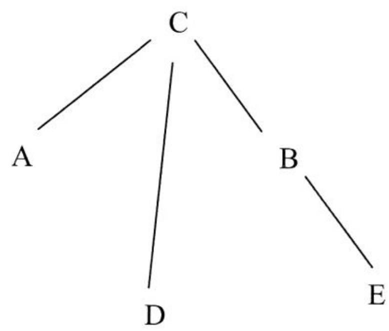
Ejemplo

Representar los siguientes conjuntos mediante diagramas lineales

$C=\{\text{a, b, c, ..., x, y, z}\}$ $A=\{\text{o, p, q, r, s, t, u}\}$ $B=\{\text{e, f, g, h, i, j, k}\}$

$D=\{\text{i, j, p, q, r}\}$ $E=\{\text{i, j, k}\}$

Solución:



OPERACIONES

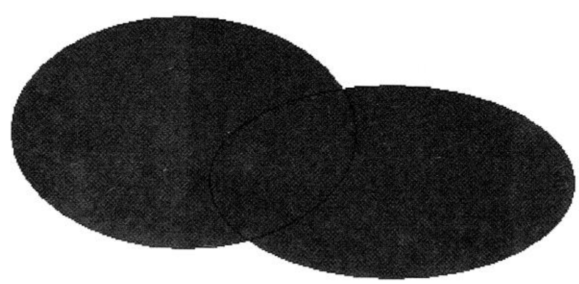
Es posible realizar operaciones con conjuntos para obtener otros conjuntos. Las operaciones más utilizadas son: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complementación.

UNION ($\cup$)

La unión de dos conjuntos A y B está dada por otro conjunto cuyos elementos pertenecen a A, a B o a ambos a la vez. Se nota $A \cup B$ y se define como:

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Gráficamente se representa así:



Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Hallar $A \cup B$.

Solución:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Propiedades

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

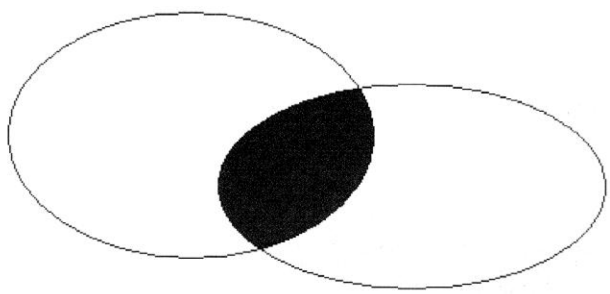
1. $A \subset A \cup B$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup \emptyset = A$
5. $(A \cup C) \cup B = A \cup (C \cup B)$
6. $A \cup E = E$
7. $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$

INTERSECCION ($\cap$)

La intersección de dos conjuntos A y B es otro conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B. Se nota $A \cap B$ y se define como:

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Gráficamente se representa así:



Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Hallar $A \cap B$.

Solución:

$A \cap B = \{3, 4\}$

Propiedades

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

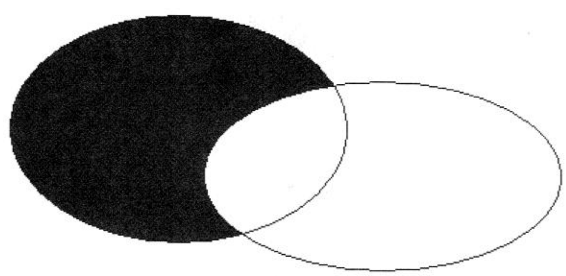
1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cap C) \cap B = A \cap (C \cap B)$
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cap B \subset A$
6. $A \cap E = A$
7. $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$
8. $A \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup (A \cap B)$
9. $A \cup (C \cap B) = (A \cup C) \cap (A \cup B)$
10. $A \cup (A \cap B) = A$
11. $(A \cup B) \cap A = A$

DIFERENCIA $(-)$

La diferencia de dos conjuntos A y B es un conjunto cuyos elementos pertenecen a A pero no a B; se nota $A - B$ y se define como:

$$A - B = \{x : (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$$

Gráficamente se representa así:



Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Hallar $A - B$.

Solución:

$A - B = \{1, 2\}$

Propiedades

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

1. $A - B \subset A$
2. $(A - B) \cap B = \varnothing$
3. $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$
4. $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$
5. $A - \varnothing = A$
6. $\varnothing - A = \varnothing$
7. $A \cap B = \varnothing \rightarrow A - B = A$
8. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ **Diferencia simétrica**

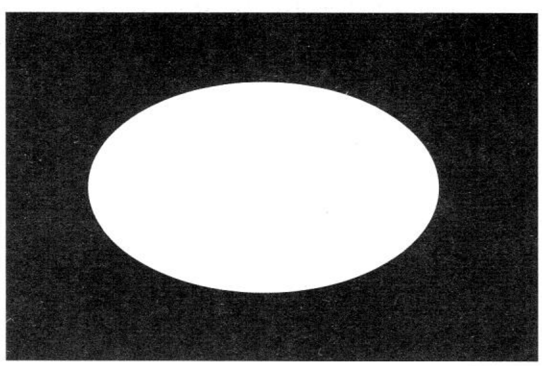
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

COMPLEMENTO

El complemento de un conjunto A es otro conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto universo y no a A. Es de decir $A^C = U - A$. Se define como:

$$A^C = \{x : (x \in U) \wedge \neg(x \in A)\}$$

Gráficamente se representa así: A'



Ejemplo

Sean los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $A = \{5, 6, 7\}$. Hallar A^C.

Solución:

$A^C = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$

Propiedades

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

1. $A - B = A \cap B^C$
2. $A \cap A^C = \varnothing$
3. $\left(A^C\right)^C = A$
4. $A \cup A^C = E$
5. $\varnothing^C = E$, $E^C = \varnothing$
6. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

   $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
7. $A \subset B \leftrightarrow B^C \subset A^C$
8. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
9. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

PRODUCTO CARTESIANO

Sean los conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de los conjunto A y B al conjunto constituido por elementos de la forma (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Dicho conjunto se nota por $A \times B$ y se lee: "A cruz B". Es decir,

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

PAR ORDENADO

Es un objeto matemático de la forma

$u = (a,b)$

donde $(a,b) \in A \times B$ y $a \in A$ y $b \in B$.

a se llama primera componente o primera coordenada

b se llama segunda componente o segunda coordenada.

IGUALDAD

Los pares ordenados $u = (a,b)$ y $v = (c,d)$ son iguales si y solo sí $a = c \wedge b = d$.

Observaciones

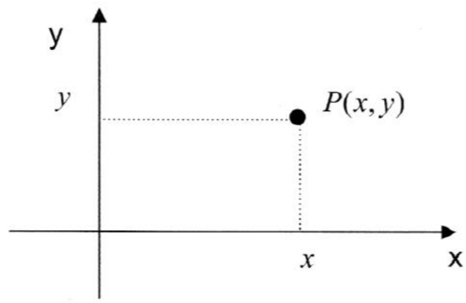
1. $A \times B \neq B \times A$

   El producto cartesiano no cumple la ley conmutativa.

2. $A^2 = A \times A$

3. $R^2 = R \times R = \{(x,y) : x \in R \wedge y \in R\}$

   Este conjunto se suele representar con puntos en el plano cartesiano.



El ***plano cartesiano*** asigna a cada punto del plano geométrico un par ordenado de números reales y a cada par ordenado de números reales un punto del plano geométrico.

4. Si el producto cartesiano lo forman más de dos conjuntos los elementos del producto cartesiano lo formarán grupos de elementos tomados ordenadamente de cada uno de los conjuntos que lo forman tomando un elemento del primer conjunto, otro del segundo otro del tercero y así hasta llegar al ultimo.

Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$.

Hallar $A \times B$ y $B \times A$

Solución:

El número de elementos del producto cartesiano se obtiene, multiplicando el número de elementos de los conjuntos que intervienen, es decir 6.

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1,),(b,2),(b,3)\}$

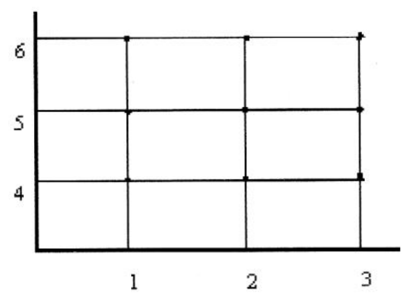
Ciertamente $A \times B \neq B \times A$.

Ejemplo

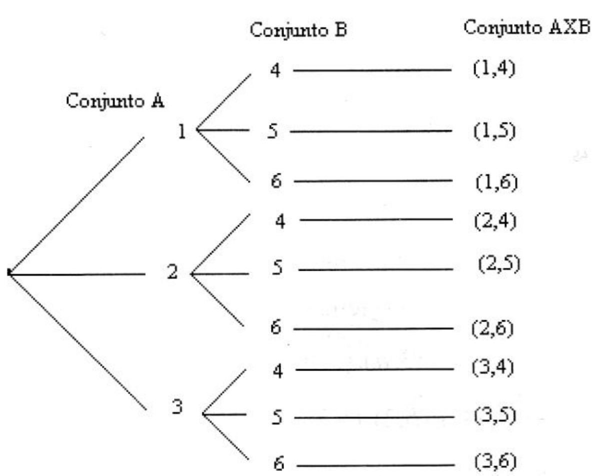
Representar gráficamente el producto cartesiano de los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{4,5,6\}$

Solución:

Se utiliza la representación cartesiana colocando los elementos del conjunto A en el eje **x** y los elementos del conjunto B en el eje **y**, los elementos del producto cartesiano los forman los puntos de intercepción que se obtienen al trazar por los elementos del conjunto A paralelas al eje **y** y por los elementos del conjunto B paralelas al eje **x**.



Se obtiene nueve elementos, que es el resultado de multiplicar el número de elementos del conjunto A por los del conjunto B como se observa en el denominado ***diagrama del árbol***.



LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS

Las siguientes igualdades se consideran leyes y se aplican para simplificar expresiones grandes.

Leyes de ídem potencia

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

Leyes asociativas

3. $(A \cup C) \cup B = A \cup (C \cup B)$
4. $(A \cap C) \cap B = A \cap (C \cap B)$

Leyes conmutativas

5. $A \cup C = C \cup A$
6. $A \cap C = C \cap A$

Leyes distributivas

7. $A \cup (C \cap B) = (A \cup C) \cap (A \cup B)$
8. $A \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup (A \cap B)$

Leyes de identidad

9. $A \cup \varnothing = A$
10 $A \cup U = U$
11. $A \cap \varnothing = \varnothing$
12. $A \cap U = A$

Leyes de absorción

13. $A \cup (A \cap B) = A$
14. $(A \cup B) \cap A = A$

Leyes de complemento

15. $A \cup A^C = U$
16. $\left(A^C\right)^C = A$
17. $A \cap A^C = \varnothing$
18. $U^C = \varnothing$
19. $\varnothing^C = U$
20. $A \cap B^C = A - B$

$\neg = {}^c$

Verdad : $V \equiv U$

Falso : $F \equiv \varnothing$

Postulado : $\varnothing \in$ todos los conjuntos

$\varnothing \subseteq A$

$A = \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

① $\cap \left[(A \Delta B) \cup (B \cap C)^c\right]$

② $\cap \left[((A \cup B) - C)^c \cup B^c\right]$

③ $\cap \left[A^c \cup (B - C)\right] + \cap\left[(A - C^c) \cap (A \cap B)\right]$

simplificar

$\{(A - C) \cap [(B \cap A) - C]\} \cup (A \cap C)$

$(A - C)$

$(A \cap C^c$

Leyes de Morgan

21. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

22. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Existe una similitud entre las leyes de las proposiciones y las leyes del álgebra de conjuntos, pudiendo cada proposición estar constituida por conjuntos, los operadores se pueden remplazar por una operación de conjuntos. Así: $\vee$ por $\cup$, $\wedge$ por $\cap$ y $\neg$ por ^{C}.

Ejemplo

Transformar la siguiente equivalencia lógica en un ejercicio de conjuntos y demostrar la igualdad.

$(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee p) \Leftrightarrow p \vee \neg(q \vee r)$

Solución:

Cambiando la notación $A = p, B = q$ y $C = r$

$(A \cup B^C) \cap (C^C \cup A) = A \cup (B \cup C)^C$

$(A \cup B^C) \cap (C^C \cup A)$	Condición inicial
$(A \cup B^C) \cap (A \cup C^C)$	Ley conmutativa
$A \cup (B^C \cap C^C)$	Ley distributiva
$A \cup (B \cup C)^C$	Ley de Morgan

Ejemplo

Simplificar la siguiente expresión conociendo que A y B son conjuntos comparables

$[C - (A \cap B)] \cup [C - (A \cup B)]$

Solución

$[C \cap (A \cap B)^C] \cup [C \cap (A \cup B)^C]$	Ley de complemento
$C \cap [(A \cap B)^C] \cup [(A \cup B)^C]$	Ley distributiva
$C \cap [(A \cap B)] \cap [(A \cup B)]^C$	Ley de Morgan
$(A \cap B) \subset (A \cup B)$	Conjuntos comparables
$C \cap (A \cap B)^C$	Notación
$C - (A \cap B)$	Ley de complemento

TECNICAS DE CONTEO

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de conjuntos está relacionada con el proceso de contar. Se cuenta el número de elementos de un conjunto (cardinalidad), el número de maneras que un proceso puede ocurrir, etc. En este apartado se razona la solución de estos problemas a partir de la relación que expresa el número de elementos en la unión de conjuntos. Se consideran dos situaciones: cuando los conjuntos son disjuntos y cuando no lo son; lo que da lugar a tres casos, los mismos que se describen a continuación.

CASO 1 Pares de conjuntos disjuntos

Si A y B son disjuntos, entonces

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Ejemplo

Sea $A = \{1,2\}$ y $B = \{a,b,c\}$, determinar $n(A \cup B)$

Solución:

Considerando la cardinalidad de A y B

$\underbrace{n(A \cup B)}_{x} = \underbrace{n(A)}_{2} + \underbrace{n(B)}_{3}$, de donde $x = 5$

Por lo tanto $n(A \cup B) = 5$.

CASO 2 Pares de conjuntos no disjuntos

Si A y B no son disjuntos, entonces

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Ejemplo

Luis come huevos o frutas (o ambos) para su desayuno cada mañana durante el mes de enero. Si come frutas 25 mañanas y huevos 18 mañanas, ¿cuántas mañanas come frutas y huevos?

Solución:

$F =$ las mañanas que come frutas.

$Q =$ las mañanas que come huevos.

Entonces,

$$\underbrace{n(F \cup Q)}_{31} = \underbrace{n(F)}_{25} + \underbrace{n(Q)}_{18} - \underbrace{n(F \cap Q)}_{x}$$

de donde $x = 12$

Por lo tanto Luis come frutas y huevos 12 mañanas.

CASO 3 Unión de tres conjuntos

Si A, B y C no son disjuntos, entonces

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Observaciones

1. El número de elementos que están sólo en A:

   $n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

2. El número de elementos que están sólo en B:

   $n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

3. El número de elementos que están sólo en C:

   $n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

4. El número de elementos que están en $A \cap B$, pero no en C:

   $n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$

5. El número de elementos que están en $A \cap C$, pero no en B:

   $n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

6. El número de elementos que están en $B \cap C$, pero no en A:

   $n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

7. El número de elementos que están en A o en B, pero no en C:

   $n(A \cup B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

8. El número de elementos que están en A o en C, pero no en B:

   $n(A \cup C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

9. El número de elementos que están en B o en C, pero no en A:

   $n(B \cup C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

10. El número de elementos de $A \cup B \cup C$ puede ser distinto al número de elementos de universo U. Es, decir, $n(A \cup B \cup C) \leq n(U)$

Ejemplo

En una encuesta realizada en la EPN sobre los medios de transporte a cada estudiante se le preguntó si el taxi, el bus o el carro privado es el medio más usado para asistir a clases. Se permitió más de una respuesta. El resultado de la encuesta fue el siguiente:

30 estudiantes opinaron a favor del taxi.

35 estudiantes opinaron a favor del carro privado.

100 estudiantes opinaron a favor del bus.

15 estudiantes opinaron a favor del taxi y del bus.

15 estudiantes opinaron a favor del taxi y del carro privado.

20 estudiantes opinaron a favor del bus y del carro privado.

5 estudiantes opinaron a favor de los tres medios de transporte.

Cuántos estudiantes respondieron a la encuesta?

Solución:

$T =$ los que opinaron a favor del taxi.

$C =$ los que opinaron a favor del carro privado.

$B =$ los que opinaron a favor del bus.

Entonces,

$$\underbrace{n(T \cup C \cup B)}_{x} = \underbrace{n(T)}_{30} + \underbrace{n(C)}_{35} + \underbrace{n(B)}_{100} - \underbrace{n(T \cap B)}_{15} - \underbrace{n(T \cap C)}_{15} - \underbrace{n(B \cap C)}_{20} + \underbrace{n(T \cap C \cap B)}_{5}$$

$x = 120$

Por lo tanto 120 estudiantes respondieron a la encuesta.

RELACION

Una relación f es el subconjunto de pares ordenados, del producto cartesiano $U \times U$, cuyas componentes son elementos de un universo U.

DOMINIO

El dominio de una relación f es el subconjunto de U, cuyos elementos son la primera componente de los pares ordenados que pertenecen a f.

GRAMAS

CARROL

RECORRIDO

El recorrido de una relación f es el subconjunto de U, cuyos elementos son la segunda componente de los pares ordenados que pertenecen a f.

Ejemplo

Sea el conjunto universo $U = \{1,2,3\}$ Se define la relación $f = \{(x, y) : y > x\}$.

Hallar el dominio y el recorrido de f.

Solución:

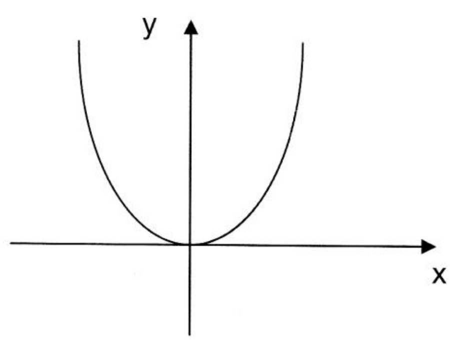
$f = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, entonces

$D_f = \{1,2\}$, $R_f = \{2,3\}$

Ejemplo

Sea el conjunto de los reales. Se define la siguiente relación $f = \{(x, y) : y = x^2\}$

Graficar y determinar el dominio y el recorrido de f.

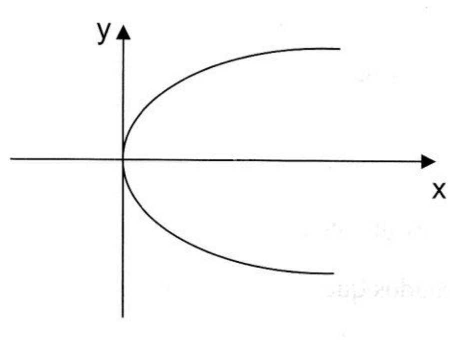


$D_f = R$ $R_f = [0,+\infty[$.

Ejemplo

Sea el conjunto de los reales. Se define la siguiente relación $f = \{(x, y) : x = y^2\}$

Graficar y determinar el dominio y el recorrido de f.



$D_f = [0,+\infty[$, $R_f = R$

Observación

Para determinar el dominio se debe averiguar que valores debe tomar x para que y sea real.

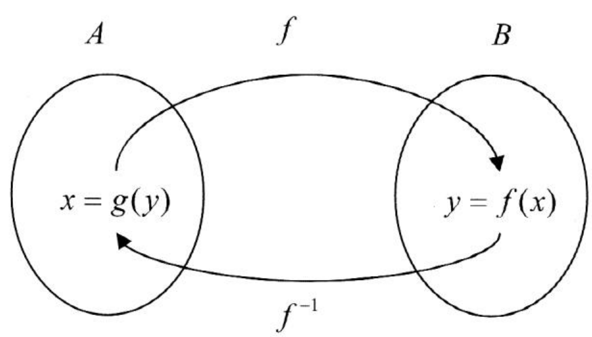
Para determinar el recorrido se debe averiguar que valores debe tomar y para que x sea real.

RELACION INVERSA

Sean A y B conjuntos y $f \subset A \times B$ una relación de A en B. Se llama relación inversa de f y se nota por f^{-1}, el subconjunto de $B \times A$ definido por:

$$f^{-1} = \{\, (y,x) \in B \times A : (x,y) \in f \,\}$$

Gráficamente:



Ejemplo

Sea la relación $f \subset N \times N$ definida por:

$$f = \{\, (x,y) \in N \times N : x + 2y = 12) \wedge 2 \le x \le 10 \wedge x \text{ es par} \,\}$$

a) Describir f por extensión.

b) Determinar el dominio de f.

c) Determinar el recorrido de f.

d) Expresar la relación inversa de f.

Solución:

a) $f = \{(2,5),(4,4),(6,3),(8,2),(10,1)\}$

b) $D_f = \{2,4,6,8,10\}$

c) $R_f = \{5,4,3,2,1\}$

d) $f^{-1} = \{(5,2),(4,4),(3,6),(2,8),(1,10)\}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sean los conjuntos A, B, C no vacíos tales que cumplen las siguientes condiciones: $C = A \cup B \cup C = \{1,2,3,4\}$, $A \Delta B = \{1,3\}$, $C - A \cup B = \{2\}$ $A - B = \{1\}$, $B \cap C = \{4,3\}$. Hallar: $C - (A \cap B)^{c}$

2. Determinar cuales pares de los siguientes conjuntos son iguales
   $\emptyset$, $\{0\}$,$\{\emptyset\}$

3. Demostrar que:

   a) Si $A \subset B \wedge A \cup B = \bigcup$ entonces $B - A = A^{c}$

   b) Si $B - A = B$ entonces $A - B^{C} = \emptyset$

   c) Si $A \cup B \subset A \cap C$, entonces $B \subset C$

d) Si $D \subseteq A \cap B$, entonces $(A-B) \cap D = \emptyset$

e) Si $A \Delta B = \bigcup$, entonces $A^C - B = \emptyset$

4. Demostrar que $\{a\} = \{b, c\} \leftrightarrow a = b = c$

5. Sean los conjuntos $A = \{1,2,\cdots,8,9\}$, $B = \{2,4,6,8\}$,

$C = \{1,3,5,7,9\}$, $D = \{3,4,5\}$, $E = \{3,5\}$

Cuales de estos conjuntos puede ser X, donde X satisface las siguientes condiciones:

a) X y B son disjuntos

b) $X \subset D$ y $X \not\subset B$

c) $X \subset A$ y $X \not\subset C$

d) $X \subset C$ y $X \not\subset A$

6. Encontrar el conjunto $\wp(C)$, donde $C = \{0,1,2\}$.

7. Dados los conjuntos

$A = \{a,b,c,d\}$ $B = \{b,c,d\}$ $E = \{d,g,h\}$ $D = \{g,h\}$

Representar mediante diagramas de Venn-Euler

a) $A - B$ b) $A - E$ c) $A - D$

8. Mediante diagramas de Venn-Euler demostrar la ley distributiva

$A \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup (A \cap B)$

9. Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{6,7,8\}$.

Hallar: a) $A \times B$ b) A^2 c) B^2 d) $B \times A$

e) $(A \cup B) \times B$ f) $A^2 \times B$ g) A^3

10. Si $A = \{-3,2\}$, $B = \{1,3\}$ y $C = \{-1,2\}$

Representar gráficamente

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $(A \cup B) \times C$ d) $(A \cap C) \times B$

11. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos, probar que:
$(A \cap B) - [(A - C) \cup (B - C)] = A \cap B \cap C$

12. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos, probar que:
$[(A \cup C) - B] \cup [(B \cup C) - A] = (A \cup B \cup C) - (A \cap B)$

13. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos, probar que:
$\{(A - C) \cap [(B \cup A) - C]\} \cup (A \cap C) = A$

14. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos, probar que:

$$(A \cup B) \cap (A \cup B^{C}) \cap (A^{C} \cap B) \cap (A^{C} \cup B^{C}) = \varnothing$$

15. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos, simplificar:

$$\left\{(A \cap B)^{c} - (A \Delta B)^{c}\right\} \cap A$$

16. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos, probar que:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

17. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos probar que:
$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

18. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos probar que:
$(A \Delta B)^C = (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$

19. Demostrar que:

$$\left[(A \cup B)^C \cup \left(A \cap B^C\right)\right] \Delta A^C = A \Delta B$$

20. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos probar que:

$$[A-(A\cap B)]\cup[B-(A\cap B)]\cup(A\cap B)=A\cup B$$

21. Utilizando las propiedades de las operaciones entre conjuntos probar que:

$$A\cup(B\Delta C)=(A\cup B\cup C)-\left(A^{C}\cap B\cap C\right)$$

22. Simplificar

$$\left\{\left(A\Delta A^{C}\right)\cap\left[\left(A\Delta A^{C}\right)\cup B^{C}\right]\right\}-\left[\left(A^{C}\cup B\right)\cap\left(B^{C}\cup A^{C}\right)\right]$$

23. De un grupo de 20 profesores del propedèutico se obtuvo los siguientes resultados:

10 enseñan matemáticas

9 enseñan física

7 enseñan química

4 enseñan matemáticas y física

Ninguno enseña matemáticas y química

a) Cuántos enseñan química y física?

b) Cuántos enseñan sólo física?

24. Con el objeto de hacer una prueba los periódicos El Hoy, El Comercio y el Universo, vendieron el mismo número de ejemplares entre 497 lectores. El análisis de dicha prueba revela que:

26 personas leen El Comercio y El Universo

38 leen El Comercio y El Hoy

50 leen El Hoy y El Universo

11 leen los tres periódicos

a) Cuántas personas leen solamente El Hoy?

b) Cuántas personas leen sólo uno de los periódicos?

25. Una encuesta a 200 estudiantes reveló que:

68 estudiantes se comportan bien

138 estudiantes son inteligentes

160 estudiantes son habladores

120 estudiantes son habladores e inteligentes

20 estudiantes se comportan bien pero no son inteligentes

13 estudiantes se comportan bien pero no son habladores

15 estudiantes se comportan bien y son habladores pero no son inteligentes

Cuántos de los 200 estudiantes entrevistados no se comportan bien, son habladores y no son inteligentes?

26. Un total de 60 clientes visitaron una tienda de artículos de computadores.

52 compraron algún artículo

20 compraron papel

36 compraron flash-memories

12 compraron cintas para impresoras

6 compraron papel y flash-memories

9 compraron flash-memories y cintas

5 compraron papel y cintas

Cuántos compraron los tres artículos?

Capítulo 3

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

DEFINICION

El sistema de los números reales es un conjunto que se nota R, en el que se han definido dos operaciones: adición (+) y la multiplicación (.) y tal que en el se satisfacen los axiomas de identidad, los axiomas de campo y el axioma de completez.

A los elementos de R se les denomina números reales y se los designa con las letras minúsculas del alfabeto: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Los números reales tienen subconjuntos que son los números racionales, irracionales, enteros y naturales, los mismos que se describen a continuación.

Números racionales (Q)

Son números reales de la forma $\frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$, además $p \wedge q$ son primos (P) entre sí, es decir, son divisibles, únicamente para sí mismos y para la unidad. Se simbolizan por Q y se definen como:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \wedge q \in Z, \ q \neq 0 \right\}$$

Ejemplos

$\frac{2}{3}, \ \frac{1}{4} = 0.25, \ \frac{1}{3} = 0.333\ldots$

Números irracionales (I)

Son números reales que no son racionales, es decir son el complemento de los números racionales, en el universo de los reales.

Ejemplos

$\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}$

Definición: $\forall x, y \in R : x - y = x + (-y)$

A esta operación se conoce como diferencia.

Definición: $\forall x, y \in R : \dfrac{x}{y} = x\left(\dfrac{1}{y}\right)$

A esta operación se conoce como división.

Definición: $\forall x \in R,\ \forall n \in N : \begin{cases} x^1 = x \\ x^{1+n} = x.x^n \end{cases}$

9. $\forall x, y \in R : \begin{cases} (-x)y = x(-y) = -(xy) \\ (-x)(-y) = xy \end{cases}$

10. $\forall x, y \in R : xy = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

PRINCIPIO DE INDUCCION

Otro método de demostración, ligado con el conjunto de los números enteros positivos se denomina método de demostración por inducción. Permite probar resultados con números naturales, generalizando situaciones particulares. El principio de inducción se enuncia de la siguiente manera:

TEOREMA

Sea $P(n)$ una proposición definida para todo $n \in Z^+$. Si:

a) $P(1)$ es verdadera

b) $P(k) \to P(k+1), \forall k \geq 1$ es verdadera; supuesto que $P(k)$ es verdadera, entonces la proposición $P(n)$ es verdadera, $\forall n \in Z^+$.

Ejemplo

Demostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Solución:

a) $P(1)$ es verdadera, pues

$2.1 - 1 = 1 = 1^2$

b) P.D. $P(k) \to P(k+1), \forall k \geq 1$ es verdadera, suponiendo que $P(k)$ es verdadera.

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$

$$=(k+1)^2$$

Se deduce que $P(k+1)$ es verdadera y de las partes a) y b) se concluye que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in Z^+$.

EL SIMBOLO DE SUMATORIA

El símbolo de sumatoria se utiliza para escribir sumas en forma abreviada y tiene la forma:

$$\sum_{i=n_0}^{n} a_i$$

Donde:

a) a_i es una expresión que depende de $i \in N$ y es el objeto a ser sumado.

b) i se denomina índice de sumación y $n_0 \leq i \leq n$

c) n_0 es el límite inferior de sumación y n es el límite superior de sumación.

La expresión $\sum_{i=n_0}^{n} a_i$ se lee: "sumatoria de los a_i desde $i=n_0$ hasta $i=n$".

Ejemplos

1. $1+2+3+\ldots+15=\sum_{i=1}^{15} i$

2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{20}=\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{i}$

3. $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$

$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3 \dots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4+2^4+3^4+\dots n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Propiedades

asociativa

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}+a_n = (a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1})+a_n$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)+a_n$

Aso.

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$ **Propiedad distributiva**

2. $\sum_{i=1}^{n}\alpha a_i=\alpha\sum_{i=1}^{n} a_i$ **Propiedad multiplo escalar**

3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=a_n-a_0$ **Propiedad telescópica**

EXPONENTES ENTEROS

Para cualquier número real x y para cualquier entero positivo n, el símbolo x^n se lee como "x a la enésima potencia", y representa el producto de n factores de x. Así:

$$x^n = \overbrace{x.x\cdots x}^{n \text{ factores}}$$

LEYES DE LOS EXPONENTES

Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes,** las mismas que constan a continuación:

Leyes de los exponentes

Sean x y y números reales y m y n números enteros. Entonces:

1. $x^m x^n = x^{m+n}$
2. $(x^m)^n = x^{mn}$
3. $(xy)^n = x^n y^n$
4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Ejemplo

Simplificar $\dfrac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$

Solución:

$$\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} = \frac{(-6)^3x^3(y^2)^3}{x^2y^5} = -\frac{216x^3y^6}{x^2y^5} = -216x^{3-2}y^{6-5}$$

$$= -216xy$$

TEOREMA DEL BINOMIO

Cuando $(a+b)^n$ se extiende para un entero positivo arbitrario n, los exponentes a y b siguen un patrón definido. Por ejemplo:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

NOTACION FACTORIAL

Antes de dar una fórmula general para el desarrollo de $(a+b)^n$, será útil introducir la notación factorial.

El símbolo $r!$ se define para cualquier entero positivo como el producto:

$r! = r(r-1)(r-2)\cdots 3.2.1$

y se lee "r factorial". Por ejemplo

$4! = 4.3.2.1$

Por definición $0! = 1$.

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2.1 = 2$
$3! = 3.2.1 = 6$
$4! = 4321 = 24$
$5! = 54321 = 120$
...

Ejemplo

Simplificar $\dfrac{r!(r+1)}{(r-1)!}$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1)! = (n+1)n!$

Solución:

$$\frac{r!(r+1)}{(r-1)!} = \frac{(r+1)r(r-1)!}{(r-1)!} = (r+1)r$$

$P(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ demostrar

TEOREMA **Binomio de Newton**

Para cualquier número positivo n

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$$

$$+\cdots+b^n$$

En la fórmula anterior la expresión

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^{r}$$

es el $(r+1)$ término en el desarrollo de $(a+b)^n$. Para $r=0,1,\cdots,n$, y los números

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

se llaman coeficientes binomiales.

Ejemplo

Usando el teorema del binomio desarrollar $(a+b)^4$.

Solución:

$$(a+b)^4 = a^4+\frac{4}{1!}a^{4-1}b+\frac{4(3)}{2!}a^{4-2}b^2+\frac{4(3)(2)}{3!}a^{4-3}b^3+\frac{4(3)(2)(1)}{4!}b^4$$

$$= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Ejemplo

Encontrar el sexto término en el desarrollo de $(x^2-2y)^7$.

Solución:

El término $(r+1)$ en el desarrollo de $(a+b)^n$, el sexto término corresponde a $r=5$. Si $n=7, a=x^2$ y $b=-2y$, entonces

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^{r} = \frac{7.6.5.4.3}{5!}\left(x^2\right)^{7-5}(-2y)^5 = -672x^4y^5$$

Ejemplo

Encontrar el coeficiente en el desarrollo de $\left(2x^2-\frac{1}{2}x\right)^9$.

Solución:

Del término general: $a^{n-r}b^{r} = \left(2x^2\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{2}x\right)^r$

Igualando a 14 el exponente de x: $x^{18-2r}.x^{r} = x^{14} \rightarrow 18-r=14 \rightarrow r=4$

$\frac{9.8.\cdots 6}{4!}\left(2x^2\right)^{9-4}\left(-\frac{1}{2}x\right)^4 = 252x^{14}$. Es decir el valor pedido es 252.

POLINOMIOS

Una **expresión algebraica** es el resultado de efectuar un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces de un grupo de variables y números reales.

Ejemplos

$$3a+\frac{2}{b^2}, \qquad \frac{6x+5x^2}{2-3x}, \qquad \sqrt{3r+5s^2}$$

POLINOMIOS

Son expresiones algebraicas obtenidas por sumas, restas y multiplicaciones de un conjunto finito de números reales y variables. Así:

Ejemplos

$$4x^3-2x^2+x-1, \qquad 5x^2y-2yz+\sqrt{2}, \qquad a+2bc$$

Ciertas expresiones algebraicas reciben nombres especiales. **Monomios** son polinomios de un solo término. Ejemplo $8x^2y^6$. **Binomios** son polinomios de dos términos. Ejemplo $4a^2-7bc$. **Trinomios** son polinomios de tres términos. Ejemplo $7a^2+4ab+3b^2$.

DEFINICION

Un polinomio de grado n en la variable x es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0$$

donde n es un entero positivo y $a_i,\ i=0,1,\cdots,n$ son números reales

ALGEBRA DE POLINOMIOS

Con polinomios se pueden efectuar operaciones de suma, resta, multiplicación y división usando las propiedades de los números reales.

Ejercicios

Efectuar

$(3x^5-5x^2+4x-7)+(x^3-3x^2+2x+1)$, $\quad(3x^2+2x-1)-(x^4-4x^2+2x)$,

$(z^3+4z-3)(2z^3-7z+1)$.

PRODUCTOS NOTABLES

Ciertos productos de binomios ocurren tan frecuentemente que se debe aprender a reconocerlos. A continuación se da una lista de estos **productos notables**. Pueden verificarse usando los axiomas y las propiedades de los números reales.

Fórmulas de los productos notables

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
4. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
5. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
6. $(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = x^3 + y^3$
7. $(x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = x^3 - y^3$
8. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

Ejemplo

Efectuar $\left(4x - \dfrac{1}{x^2}\right)^3$

Solución:

$$\left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3 = (4x)^3 - 3(4x)^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3(4x)\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$= 64x^3 - 48 + \frac{12}{x^3} - \frac{1}{x^6}$$

Ejemplo

Efectuar $(5x+2)(10x+4)$

Solución:

$$(5x+2)(10x+4) = (5)(10)x^2 + [(5)(4)+(2)(10)]x + (2)(4) = 50x^2 + 40x + 8$$

FACTORIZACION

El proceso de tratar de escribir un polinomio como el producto de otros polinomios se llama **factorización** y cada polinomio en el producto se llama **factor** del polinomio original. De las fórmulas de los productos notables se obtienen las siguientes formulas de factorización.

Fórmulas de factorización

1. $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$
2. $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$
3. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
4. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$
5. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$
6. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
7. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
8. $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

Ejemplo

Factorizar $25x^4 - 36y^6$

Solución:

Se tiene una diferencia de cuadrados, se puede factorizar usando la fórmula 3. Así:

$$25x^4 - 36y^6 = (5x^2 + 6y^3)(5x^2 - 6y^3)$$

Ejemplo

Factorizar $8a^3 + 27b^6$

Solución:

Se tiene una suma de cubos, se puede factorizar usando la fórmula 6. Así:

$$8a^3 + 27b^6 = (2a + 3b^2)\left[(2a)^2 - (2a)(3b^2) + (3b^2)^2\right]$$

$$= (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4)$$

FACTORIZACION

El proceso de tratar de escribir un polinomio como el producto de otros polinomios se llama **factorización** y cada polinomio en el producto se llama **factor** del polinomio original. De las fórmulas de los productos notables se obtienen las siguientes formulas de factorización.

Fórmulas de factorización

1. $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
2. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$
3. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
4. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3$
5. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3$
6. $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$
7. $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$
8. $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

Ejemplo

Factorizar $25x^4-36y^6$

Solución:

Se tiene una diferencia de cuadrados, se puede factorizar usando la fórmula 3. Así:

$$25x^4-36y^6=\left(5x^2+6y^3\right)\left(5x^2-6y^3\right)$$

Ejemplo

Factorizar $8a^3+27b^6$

Solución:

Se tiene una suma de cubos, se puede factorizar usando la fórmula 6. Así:

$$8a^3+27b^6=\left(2a+3b^2\right)\left[(2a)^2-(2a)\left(3b^2\right)+\left(3b^2\right)^2\right]$$

$$=\left(2a+3b^2\right)\left(4a^2-6ab^2+9b^4\right)$$

EXPRESIONES RACIONALES

Son expresiones del tipo $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Por ejemplo:

$$\frac{x-2}{x+1}, \quad \frac{x^2+1}{x-2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^2-2x+1}$$

Para resolver problemas, constantemente, se deben combinar expresiones racionales o fracciones y luego simplificar. Con fracciones se pueden hacer operaciones de suma, resta multiplicación y división. A continuación se presentan las propiedades que se usan con más frecuencia.

Propiedades

$\forall a,b,c,d \in R$ y con cada denominador diferente de cero se cumple que:

1. Cancelación:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, c \neq 0$$

2. Suma o resta

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

3. Multiplicación

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

4. División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$$

Ejemplo

Simplificar $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

Solución:

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Ejemplo

Efectuar $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2+4x+4}$

Solución:

Se debe hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores (MCM), el cual se encuentra factorizando los denominadores y hallando un producto de los diferentes factores, usando cada factor con el exponente más alto. Así:

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

Ejemplo

Efectuar $\dfrac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\dfrac{2x+5}{x+3}$

Solución:

Para dividir expresiones racionales se aplica la regla 4. Así:

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}.\frac{x+3}{2x+5}$$

Usando la regla 3:

$$=\frac{(2x^2+9x+10)(x+3)}{(x^2+4x+3)(2x+5)}$$

Factorizando

$$=\frac{(2x+5)(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+1)(2x+5)}$$

Simplificando

$$=\frac{x+2}{x+1}$$

SUCESIONES

Se puede describir una sucesión como una lista de objetos, eventos o números que vienen uno después de otro, es decir, una lista de cosas dadas en algún orden definido.

Ejemplos

Lo días de la semana lunes, martes,…, domingo

Los meses del año enero, febrero,…, diciembre

Los números 3, 4,5,…,12

Los números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$

Cada objeto de la lista se llama **término** de la sucesión. Las sucesiones pueden ser finitas o infinitas. Se reseñarán las sucesiones finitas a menos que se afirme lo contrario.

Los términos de una sucesión pueden colocarse en correspondencia uno a uno con el conjunto N de los números enteros positivos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \uparrow, & \uparrow, & \uparrow, & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Por esta propiedad de correspondencia se puede definir una sucesión matemáticamente.

DEFINICION

Sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros N positivos

Se denota una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

por la notación $\{a_n\}$.

El n-ésimo término a_n se llama término general.

PROGRESION ARITMETICA

DEFINICION

Una sucesión, tal que los términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1,2,3,\cdots$ tienen una diferencia fija $a_{n+1} - a_n = d$, se llama **progresión aritmética.** El número d se llama diferencia de la progresión.

En general $a_n = a_1 + (n-1)d$

Ejemplo

La diferencia en una progresión aritmética es -2 y el sexto término es 3. Encontrar el primer término de la progresión.

Solución:

El sexto término de la progresión es

$a_6 = a_1 + (6-1)d$

$a_6 = 3$ y $d = -2 \rightarrow a_1 = 13$

PROPIEDAD

La suma términos equidistantes alrededor de un elemento es constante. Asi:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

SUMA DE TERMINOS

Sean

$a =$ primer término

$n =$ número de términos

$d =$ diferencia de dos términos consecutivos

$l =$ último término

$S =$ suma de términos (n es finito)

entonces

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

MEDIA ARITMETICA

Si una progresión aritmética tiene 3 términos,

$$a, m, b$$

el segundo término se llama **media aritmética** de a y b.

Puesto que $a_n = a_1 + (n-1)d$ implica que

$$b = a + (3-1).d$$

o también

$$d = \frac{b-a}{2}$$

se deduce que

$$m = \frac{a+b}{2}$$

PROGRESION GEOMETRICA

DEFINICION

Una sucesión, tal que los términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1,2,3,\cdots$ tienen una razón fija $a_{n+1}/a_n = r$, se llama **progresión geométrica.**

De $a_{n+1}/a_n = r$ se tiene que una progresión geométrica con una razón r, la misma que se define mediante la fórmula

$$a_{n+1} = a_n.r$$

En general el n-ésimo término de una progresión geométrica con primer término a y razón r, es

$$a_n = a.r^{n-1}$$

Ejemplo

Encontrar el tercer término de una progresión geométrica con razón $\frac{2}{3}$ y el sexto término $\frac{128}{81}$.

Solución:

Usando la fórmula $a_n = a.r^{n-1}$, se encuentra a

Considerando que $a_6 = \frac{128}{81}$ y $r = \frac{2}{3}$

$$\frac{128}{81} = a.\frac{2}{3}^{6-1}$$

$a = 12$

Aplicando $a_n = a.r^{n-1}$ con $n = 3$ se tiene

$$a_3 = 12\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} = 12\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{3}$$

el tercer término de la progresión es $a_3 = \frac{16}{3}$.

PROPIEDAD

El producto de términos equidistantes alrededor de un elemento es constante. Asi:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

SUMA DE TERMINOS

Sean

a = primer término

n = número de términos

r = razón de dos términos consecutivos

S = suma de términos (n es finito)

entonces

$$S = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

MEDIA GEOMETRICA

Si una progresión geométrica tiene 3 términos: a, m, b, entonces

$$m = \sqrt{a.b}$$

RADICALES

Las raíces de los números reales de definen por el enunciado

$$\sqrt[n]{x} \text{ si y sólo si } r^n = x$$

La expresión $\sqrt[n]{x}$ se llama radical, el número n es el índice del radical y x se llama radicando. El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama signo radical. Si $n = 2$, se omite el índice .

Si n es impar, para cualquier valor de x hay una raíz enésima de x $\left(\sqrt[5]{-32} = -2\right)$.

Si n es par y positivo, hay dos raíces enésimas de x. Sin embargo el símbolo $\sqrt[n]{x}$ se reserva para la raíz positiva $\left(\sqrt{4} = 2\right)$.

LEYES DE LOS RADICALES

Las siguientes propiedades se pueden usar para simplificar expresiones que contengan radicales.

Leyes de los radicales

Sean x y y números reales y m y n números enteros. Entonces:

1. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
2. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, \text{si } n \text{ es impar} \\ |x|, \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

Siempre y cuando los radicales representen números enteros

Ejemplo

Simplificar $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} = \sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \sqrt[4]{\left(2a^2b^4\right)^4} = 2a^2b^4$$

RACIONALIZACIÓN DE RADICALES

Cuando se quitan los radicales del numerador o del denominador de una fracción, se dice que se ha racionalizado. En álgebra, normalmente se racionaliza el denominador, pero, en cálculo a veces es importante racionalizar el numerador. El procedimiento implica la multiplicación de la fracción por 1. Por ejemplo

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo

Racionalizar $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Solución:

Se multiplica y se divide a la fracción por la conjugada del denominador, así

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} . \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$

EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier número real x, y para cualquier entero positivo n, se define

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Además se define

$$x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)m$$

para cualquier m tal que m/n sea la mínima expresión.

LEYES DE LOS EXPONENTES

Las leyes de los exponentes que se dieron para los exponentes enteros también son verdaderas para los exponentes racionales.

Leyes de los exponentes racionales

Sean x y y números reales y s y r números racionales. Entonces:

1. $x^s x^r = x^{s+r}$
2. $\left(x^r\right)^s = x^{rs} = \left(x^s\right)^r$
3. $(xy)^r = x^r y^r$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
5. $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

Siempre y cuando las expresiones representen números reales.

Ejemplo

Simplificar $\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right)$

Solución:

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{25r^{3/2}}{s^{2/3}}\right)\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{50r^0}{s^{7/6}}\right) = \frac{50}{s^{7/6}}$$

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación** es una igualdad que es verdadera para determinados de la incógnita.

Una **ecuación lineal** corresponde al tipo más sencillo de ecuación y es de la forma

$$ax + b = 0, a \neq 0$$

Resolver una ecuación lineal o de primer grado es hallar un número real tal que al remplazar en la misma la reduce a una identidad.

Ejemplo

Resolver $3x - 6 = 0$

Solución:

Se parte de la expresión original y se usan los axiomas de los números reales

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3}.3x = \frac{1}{3}.6$$

$$x = 2$$

ECUACIONES CUADRATICAS

Una ecuación polinómica de grado n es una ecuación de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, a_{n \neq 0}$$

donde n es un número entero no negativo y $a_i, i = 0,1 \cdots n,$ son números reales. Para una ecuación lineal el grado $n = 1$.

La solución de una ecuación polinómica se llama raíz de la ecuación.

La **ecuación cuadrática** o de segundo grado es una expresión de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

Sus raíces pueden hallarse por factores o usando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza de las raíces está determinada por el radicando $b^2 - 4ac$, al cual se lo llama **discriminante.** Los 3 casos posibles se sintetizan a continuación.

DISCRIMINANTE	RAICES
$b^2 - 4ac > 0$	Raíces reales diferentes
$b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales iguales
$b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales

Ejemplo

Resolver $x^2 + 5x + 6 = 0$

Solución:

Factorizando

$(x + 3)(x + 2) = 0$

Usando las propiedades de los reales

$x+3=0 \vee x+2=0$

$x=-3 \vee x=-2$ $Sol:\{-2,-3\}$

Ejemplo

Resolver $4x^3+8x^2-4x=0$

Solución:

Factorizando

$4x(x^2+2x-1)=0$

Entonces

$x=0 \vee x^2+2x-1=0$

Resolviendo la segunda ecuación con la fórmula se tiene

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

$Sol:\{0,-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2}\}$

ECUACIONES MISCELANEAS

Muchas ecuaciones que no son polinómicas pueden convertirse a esa forma por medio de operaciones algebraicas.

Ejemplo

Resolver $\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{1-2x}{x+1}+x$

Solución:

Se multiplica a los dos miembros de la ecuación por $x+1$ y se simplifica, obteniendo

$2x+5=1-2x+x^2+x$

De donde

$x^2-3x-4=0$

Factorizando

$x=4 \vee x=-1$

Si se sustituyen estos valores en la ecuación dada se tiene que 4 es solución, pero -1 es una solución extraña. Esto último se dio por haber multiplicado a los dos miembros de la ecuación por una expresión que contiene a la variable.

Ejemplo

Resolver $\sqrt[3]{4x^2-1}-2=0$

Solución:

Se aísla la raíz a un lado

$\sqrt[3]{4x^2-1}=2$

Elevando los dos miembros al cubo se elimina el radical

$$\left(\sqrt[3]{4x^2-1}\right)^3=2^3$$

$4x^2-1=8 \to 4x^2=9 \to x=\pm\dfrac{3}{2}$ $\qquad Sol:\left\{\pm\dfrac{3}{2}\right\}$

AXIOMAS DE ORDEN

Las propiedades de orden surgen de un conjunto de axiomas referentes al concepto de número positivo, para luego definir los conceptos de ***mayor que*** y ***menor que*** a partir del de número positivo.

El conjunto de los números reales positivos $(R^+ \subset R)$ satisface los siguientes axiomas:

1. $\forall x, y \in R^+ : x+y \in R^+$
2. $\forall x \in R$, se satisface una y solo una de las tres condiciones siguientes
   a) $x \in R^+$
   b) $-x \in R^+$
   c) $x = 0$

A partir de estos axiomas de orden se deducen todas las propiedades relativas al orden en los números reales.

Observaciones

1. El cero no es ni positivo ni negativo
2. $\forall x, y \in R$: se dice que "x es menor que y" si y solamente sí $(y-x)^+ \in R$ y se nota por $x<y$. Una notación equivalente a la anterior es $y>x$, y se lee "y es mayor que x".

Son también usuales las siguientes notaciones:

$<$ se lee: "menor que"

$>$ se lee: "mayor que"

$\leq$ se lee: "menor o igual que"

$\geq$ se lee: "mayor o igual que"

Los siguientes teoremas son de mucha utilidad

TEOREMAS

$\forall x \in R$ se cumple que:

1. $x > 0 \leftrightarrow x$ es positivo
2. $x < 0 \leftrightarrow x$ es negativo
3. $x > 0 \leftrightarrow -x < 0$
4. $x < 0 \leftrightarrow -x > 0$

TEOREMAS

$\forall x, y, z \in R$ se cumple que:

1. $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$
2. $x < y \rightarrow x + z < y + z$
3. $x < y \wedge z < w \rightarrow x + z < y + w$
4. $x < y \wedge z > 0 \rightarrow xz < yz$
5. $x < y \wedge z < 0 \rightarrow xz > yz$
6. $0 < x < y \wedge 0 < z < w \rightarrow 0 < xz < yw$

El siguiente cuadro es similar al anterior, excepto en que se invierte la dirección de cada desigualdad.

TEOREMAS

$\forall x, y, z \in R$ se cumple que:

1. $x > y \wedge y > z \rightarrow x > z$

2, $x > y \rightarrow x + z > y + z$

3. $x > y \wedge z > w \rightarrow x + z > y + w$

4. $x > y \wedge z > 0 \rightarrow xz > yz$

5. $x > y \wedge z < 0 \rightarrow xz < yz$

6. $x > y > 0 \wedge z > w > 0 \rightarrow xz > yw > 0$

PROPIEDADES

1. $x < 0 \wedge y < 0 \rightarrow xy > 0$

2. $x < 0 \wedge y > 0 \rightarrow xy < 0$

3. $x \neq 0 \rightarrow x^2 > 0$

4. $x > 0 \rightarrow \frac{1}{x} > 0$

5. $0 < x < y \rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

6. $x < y < 0 \rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$

7. $\forall x, y \in R^+, n \in N : x > y \rightarrow x^n > y^n$

8. $\forall x, y \in R^+, n \in N : x > y \rightarrow x^{\frac{1}{n}} > y^{\frac{1}{n}}$

9. $\forall x, y \in R^+, n \in N : x > y \rightarrow \frac{1}{x^n} < \frac{1}{y^n}$

10. $\forall x, y \in R$, se satisface una y solo una de las tres siguientes relaciones:

    a) $x < y$

    b) $x = y$

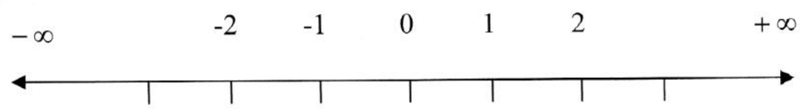
    c) $x > y$

11. $\forall x, y \in R, x < y, \exists z \in R : x < z < y$

LA RECTA REAL O NUMERICA

Asigna a cada punto de la recta geométrica un número real y viceversa a cada punto de la recta geométrica un número real.

Representación gráfica



En adelante se usará la representación de los números reales como puntos de la recta real o numérica.

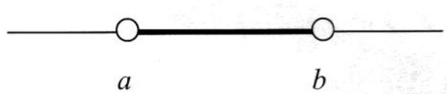
INTERVALOS

Sean $a, b \in R$, con $a < b$

I) ***Intervalos finitos***

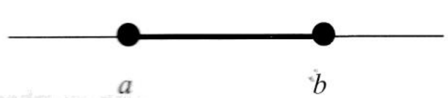
1. Abierto

$$]a, b[= \{x : a < x < b\}$$



2. Cerrado

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$



3. Semiabierto a la izquierda

$$]a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

4. Semiabierto a la derecha

$$[a,b[= \{x : a \leq x < b\}$$

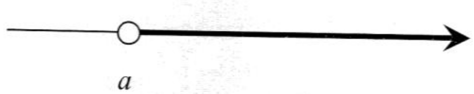
II) ***Intervalos infinitos***

1. Cerrado a la izquierda

$$[a,+\infty[= \{x : x \geq a\}$$

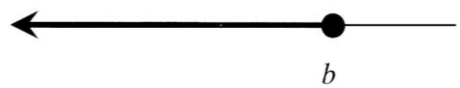
2. Abierto a la izquierda

$$]a,+\infty[= \{x : x > a\}$$



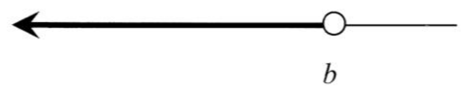
3. Cerrado a la derecha

$$\left]-\infty,b\right]=\{x : x\le b\}$$



4. Abierto a la derecha

$$\left]-\infty,b\right[=\{x : x< b\}$$



5. El conjunto de los números reales

$$\left]-\infty,+\infty\right[=R$$

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número $x\in R$, se define como:

$$|x|=\begin{cases}-x, \text{si } x<0\\ \ \ x, \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

Observación

Geométricamente el valor absoluto de un número representa una distancia.

TEOREMA $\forall x\in R$, se cumple que:

1. $|x|\ge 0$
2. $|x|=0\leftrightarrow x=0$
3. $|x|^2=x^2$
4. $\sqrt{x^2}=|x|$
5. $-|x|\le x\le |x|$

TEOREMA

$\forall x, a, b \in R$, donde $b > 0$, se cumple que:

1. $|x| \leq b \leftrightarrow -b \leq x \leq b$
2. $|x-a| \leq b \leftrightarrow -b \leq x-a \leq b$
3. $|x| \geq b \leftrightarrow x \leq -b \vee x \geq b$

TEOREMA

La desigualdad triangular. El valor absoluto de la suma de dos números $a, b \in R$ es menor o igual a la suma de sus valores absolutos, es decir:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

TEOREMA

El valor absoluto del producto dos números $a, b \in R$ es igual al producto de sus valores absolutos, es decir:

$$|ab| = |a||b|$$

TEOREMA

El valor absoluto del cociente dos números $a, b \in R$ es igual al cociente de sus valores absolutos, es decir:

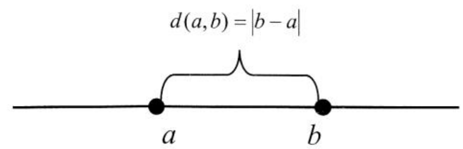
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS

DEFINICION

Si a y b son dos puntos en la recta numérica, la distancia entre a y b es

$$d(a,b) = |b - a|$$



Ejemplo

Hallar la distancia entre -2 y 6.

Solución:

$d(-2,6) = |6 - (-2)| = 8$

PUNTO MEDIO

El punto medio m de un segmento de recta que une a a y b es:

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Ejemplo

Hallar el punto medio del segmento de recta que une los puntos -2 y 6.

Solución:

$m = \dfrac{-2+6}{2} = 2$

INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad que solo es verdadera para determinados valores de la incógnita. Resolver una inecuación significa hallar los valores para los cuales la desigualdad es verdadera.

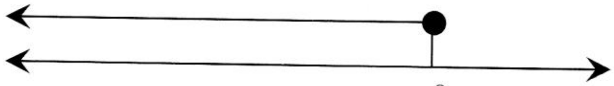
Ejemplo

Resolver $-3x + 1 \geq -7$

Solución:

$$-3x \geq -8 \rightarrow x \leq \frac{8}{3}$$

Gráficamente:



$\frac{8}{3}$

$$Sol: \forall x \in \left]-\infty, \frac{8}{3}\right]$$

Ejemplo

Resolver $\dfrac{5}{x+7}+\dfrac{3}{x+5}<2$

Solución:

$$\frac{5}{x+7}+\frac{3}{x+5}-2<0$$

$$\frac{5(x+2)+3(x+7)-2(x+7)(x+5)}{(x+7)(x+5)}<0$$

$$\frac{5x+25+3x+21-2\left(x^2+12x+35\right)}{(x+7)(x+5)}<0$$

$$\frac{-2x^2-16x-24}{(x+7)(x+5)}<0$$

$$\frac{x^2+8x+12}{(x+7)(x+5)}>0 \rightarrow \frac{(x+6)(x+2)}{(x+7)(x+5)}>0$$

-7 -6 -5 -2

$x+6$	-	-	+	+	+
$x+2$	-	-	-	-	+
$x+7$	-	+	+	+	+
$x+5$	-	-	-	+	+
F(x)	+	-	+	-	+

$$Sol: \forall x \in \left]-\infty,-7\right[\cup \left]-6,-5\right[\cup \left]-2,+\infty\right[$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Completar el siguiente cuadro marcando con una x la(s) casilla(s) correspondiente(s).

	Z	R	Q	C	Z^+	Z^-	P	I	N	$\{0\}$	R^+	R^-
5												
-3												
0												
-12												
$-\sqrt{2}$												
$5/3$												
π												
8												
2												
2i												
0.66…												
$\sqrt{-16}$												

2. Sea n un número entero positivo. Se define $S(n)$ como la suma de sus dígitos y $P(n)$ como el producto de sus dígitos. Ejemplos: $S(34)=7$ y $P(34)=12$. Se conoce que un número entero M de dos dígitos cumple con la igualdad $M=S(n)+P(n)$. Demostrar que el dígito correspondiente a las unidades es 9.

3. Usando los teoremas y las propiedades de los números reales demostrar que: $\forall x, y \in R : (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

4. Demostrar que $\forall n \in N$, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2\left(2^n - 1\right)$$

5. Demostrar que $\forall n \in N$, se cumple que:

$$1.3 + 2.4 + 3.5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$$

6. Demostrar que $\forall n \in N$, se cumple que:

$$a + \left(a + d\right) + \left(a + 2d\right) + \ldots + \left[a + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

7. Demostrar que $\forall n \in N, n$ es par : $n^3 + 20n$ es divisible por 48.

8. Demostrar que $\forall n \in N:\ n(n+1)(n+2)$ es divisible por 3.

9. Demostrar que $\forall n \in N:\ 4^n + 15n - 1$ es divisible por 9.

10. Demostrar que $\forall n \in N: 3^{2n} + 2^{6n-5}$ es divisible por 11.

11. Demostrar que $\forall n \in N: (a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ es divisible por a^2.

12. Demostrar que $\forall n \in N: \sum_{i=1}^{n} i\,(i!) = (n+1)!$

13. Hallar el coeficiente de x^{14} en el desarrollo de $\left(2x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^9$

14. Hallar el tèrmino independiente en el desarrollo de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^6$

15. Hallar el término medio en el desarrollo de $\left(2x^2 - \frac{3}{y^2}\right)^6$

16. ¿Existe término en x en el desarrollo de $\left(x^2 + \frac{3}{x^3}\right)^7$? Justificar la respuesta.

17. Hallar el coeficiente de x^{11} en el desarrollo de $\left(\frac{2}{x^4} + x\sqrt{x}\right)^{11}$.

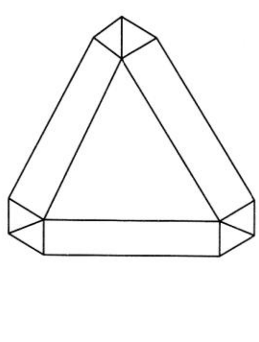
18. Sean x y y dos números reales positivos. Conociendo que $x^2 + y^2 = 1$ y que $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$, determinar el valor de $\frac{1}{xy}$.

19. Hallar el valor de $x^3 + y^3$. Se conoce que $x + y = xy = 3$.

20. En la figura dada, todos los triángulos son equiláteros y el perímetro de cada rectángulo es el cuádruple del perímetro de un triángulo pequeño. El triángulo grande tiene 90 cm de perímetro.

a) ¿Cuál es el perímetro total de la figura?

b) ¿Es posible hacer una figura como esta de modo que su perímetro total sea 2007 cm. y las medidas de los lados de los triángulos y rectángulos sean números enteros?



21. Simplificar

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$$

22. Simplificar

$$\frac{x^4+4x^2+16}{x^3+8}$$

23. Efectuar y simplificar

$$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\bullet\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right)\div\frac{c(1+c)}{bc}$$

24. Efectuar y simplificar

$$\frac{2x}{x^2-1}-\frac{x+3}{x(x-1)}+\frac{7x+5}{x\left(x^2-1\right)}$$

25. Efectuar y simplificar

$$\left(x^2-2x+1\right)\frac{x+1}{x^3-1}$$

26. En una progresión aritmética de 4 términos la diferencia es 4 y el producto de los 4 términos es 585. Escribir la progresión

27. Encontrar el quincuagésimo término de la sguiente progresión aritmética:
2, 7, 12, 17, 22,…

28. En un concurso hay 12 premios que en total suman $ 100.000 USD. Si existe una diferencia de $ 1.000 USD entre cada premio sucesivo, determinar el menor premio del concurso.

29. Hallar el valor de a tal que la sucesión $-2a,\ a^2-3,\ 3a^2-14$ sea una progresión aritmética.

30. Hallar dos números tales que su diferencia sea 32 y su media aritmética exceda a su media geométrica en 4.

31. Cada succión de una bomba de vacío extrae el 4% del aire contenido en un tanque. ¿Qué cantidad de aire habrá en el tanque después de 50 succiones si al principio contenía $1\,m^3$?

32. En el año 2000 la población de Quito era 1'200.000 habitantes. ¿Si el crecimiento poblacional es del 5%:

a) ¿Cuál será la población al finalizar el año actual?

b) ¿Cuál será la población año 2050?

33. Hallar los valores de a y b tales que la sucesión tales que $a, a+b, a+2b+4$ sea una progresión geométrica y la suma de ellos es igual a 1.

34. Determinar una progresión geométrica creciente, tal que el producto de los tres primeros elementos es 216 y la suma de los productos, que resultan tomados dos a dos es 156.

35. Racionalizar el numerador de la expresión

$$\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$$

36. Simplificar

$$\frac{\sqrt{x+1}}{|x-1|}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

37. Resolver

$$\sqrt{x+1}=2-\sqrt{2-x}$$

38. Resolver

$$\sqrt{x+1}+x-1=0$$

39. Resolver

$$|x^2 - 4| + 5x = x^2 + 4$$

40. Resolver

$$|2x - 3| + |x + 4| = -|3 - 2x| + 5$$

41. Sean $a, b, x, y \in R$, tales que $x < y < 0 \wedge 0 < a < b$. Demostrar que $0 < \dfrac{-a}{x} < \dfrac{-b}{y}$

42. Resolver

$$|2x+3| \leq 7$$

43. Resolver

$$|-3x+1| \leq 2$$

44. Resolver

$$|-x-2| \geq 4$$

45. Resolver

$$||x|-2| \geq 4$$

46. Resolver

$$|3|x|-1| \leq 5$$

47. Resolver

$$|x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geq -x^2$$

48. Resolver

$$|x-2|+|-2x+3|\geq 2$$

49. Resolver

$$\frac{x+3}{x-1}\leq\frac{-x+2}{x-5}, x\neq 1\wedge x\neq 5$$

50. Resolver

$$\left|\frac{1}{x-2}\right|\geq\left|\frac{3}{x-3}\right|, x\neq 2\wedge x\neq 3$$

51. Resolver

$$\left||x+1|+|3-x|\right| \leq 2x+3$$

52. Resolver

$$\frac{|x^2+x+1|-x^2}{x^2-1} \leq 0$$

53. Resolver

$$\frac{\sqrt{24-2x+x^2}}{x} \leq 1$$

54. Resolver

$$\sqrt{(x-1)^2(x-2)} = 2 - x$$

55. Resolver

$$x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 1}$$

58. Resolver

$$\sqrt{(x-1)(2x+1)} \geq |x-1|$$

59. Resolver

$$|2x-1| \leq \frac{\sqrt{1-4x+4x^2}}{x}$$

58. Resolver

$$\sqrt{(x-1)(2x+1)} \geq |x-1|$$

59. Resolver

$$|2x-1| \leq \frac{\sqrt{1-4x+4x^2}}{x}$$

Capítulo 4

LOS NUMEROS COMPLEJOS

Todas las cantidades consideradas hasta ahora son números reales. En diferentes ámbitos de las ciencias, pueden aplicarse también los números complejos, lo que da un nuevo significado a ciertos conceptos y explica otros. A continuación su definición.

DEFINICION

El conjunto C de los **números complejos** es el de los números de la forma $z = a + bi$, donde a y b son reales e $i = \sqrt{-1}$, el número a se denomina parte real de z $(\operatorname{Re} z)$, el número b se denomina parte imaginaria de z $(\operatorname{Im} z)$, e i es la llamada unidad imaginaria.

La expresión $a + bi$ recibe el nombre de forma normal u ordinaria de un número complejo.

De la definición se tiene que:

$i = \sqrt{-1}$, entonces

$i^2 = -1,\ \ i^3 = i.i^2 = -i,\ \ i^4 = i^2.i^2 = 1,\ \ i^5 = i.i^4 = i,$ etc.

IGUALDAD

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Esto es, si

$$z_1 = a_1 + b_1 i \qquad \text{y} \qquad z_2 = a_2 + b_2 i$$

entonces

$$z_1 = z_2 \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = a_2 \ \text{ y } \ b_1 = b_2$$

La adición y la multiplicación de complejos se definen a continuación.

OPERACIONES

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$, entonces:

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
2. $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$

EL CAMPO COMPLEJO

En el capítulo anterior se enunciaron las propiedades básicas del sistema de los números reales. Utilizando la definición de adición y multiplicación de complejos, puede demostrarse que estas propiedades básicas también se aplican al sistema de los números complejos.

AXIOMAS DE CAMPO

De la suma:

1. $\forall z_1, z_2 \in C : z_1 + z_2 \in C$ **Axioma clausurativo**
2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in C : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ **Axioma asociativo**
3. $\forall z_1, z_2 \in C : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ **Axioma conmutativo**
4. $\exists e \in C, \forall z \in C : z + e = e + z = z \quad (e = 0 + 0i)$ **Axioma del neutro aditivo**
5. $\exists w \in C, \forall z \in C : z + w = w + z = e \quad (w = -z)$ **Axioma del inverso aditivo**

Del producto

1. $\forall z_1, z_2 \in C : z_1 z_2 \in C$ **Axioma clausurativo**
2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in C : (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ **Axioma asociativo**
3. $\forall z_1, z_2 \in C : z_1 z_2 = z_2 z_1$ **Axioma conmutativo**
4. $\exists e \in C, \forall z \in C : ze = ez = z \quad (e = 1 + 0i)$ **Axioma del neutro multiplicativo**
5. $\exists w \in C, \forall z \in C^*, z \neq 0 : zw = wz = e \quad (w = z^{-1})$ **Axioma inverso multiplicativo**

Observación: $C^* = C - \{0\}$

Relación entre la suma y el producto

1. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ **Distributiva por la izquierda**
2. $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ **Distributiva por la derecha**

De lo anterior se puede afirmar que el sistema matemático constituido por el conjunto de los números complejos con las operaciones de adición y multiplicación $(C,+,.)$ constituye un campo.

Observaciones

1. El inverso aditivo de un número complejo $z=a+bi$ es $-z=-a-bi$.
2. Si $z=a+bi$ es un número complejo, entonces $\bar{z}=a-bi$ se llama su conjugado.
3. Si en $z=a+bi$, $b=0$ se obtiene un número real. Así, el conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos.

Desde el punto de vista lógico, es conveniente definir un número complejo como el par ordenado de números reales (a,b), sometido a definiciones operacionales equivalentes a las anteriores. Estas definiciones se dan a continuación:

1. **Igualdad** $(a,b)=(c,d)\leftrightarrow a=c\wedge b=d$
2. **Suma** $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
3. **Producto** $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

De aquí, $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$ se asocia con $a+bi$, donde $i=(0,1)$ con la propiedad de que $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)$. Se pueden considerar los pares $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,0)$ equivalentes a los números reales -1, 1 y 0 respectivamente.

Ejemplo

Efectuar las operaciones indicadas, simplificar y expresar los resultados en la forma normal.

a) $(5-6i))+(2+4i)$ b) $(5-6i).(2+4i)$

c) $\frac{1}{3-2i}$ d) $\frac{3-2i}{4+5i}$

Solución:

a) $(5-6i)+(2+4i)=7-2i$

b) $(5-6i)(2+4i)=10-12i+20i-24i^2=34+8i$

c) $\frac{1}{3-2i}=\frac{1}{3-2i}.\frac{3+2i}{3+2i}=\frac{3+2i}{9+4}=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$

d) $\frac{3-2i}{4+5i}=\frac{3-2i}{4+5i}.\frac{4-5i}{4-5i}=\frac{12-8i-15i+10i^2}{16+25}=\frac{2-23i}{41}=\frac{2}{41}-\frac{23}{41}i$

Ejemplo

Resolver $z^2-8z+25=0$

Solución:

Usando la fórmula cuadrática:

$$z=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{8\pm 6i}{2}=4\pm 3i$$

$Sol:\{4-3i, 4+3i\}$

Ejemplo

Resolver $z^2+16=0$

Solución:

$z^2=-16$

$z=\pm\sqrt{-16}$

$z=\pm 4i$

$Sol:\{-4i, 4i\}$

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto o módulo de un complejo $z=a+bi$ esta definido como:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Ejemplo

Hallar el valor absoluto de $z=3-4i$ es

Solución:

$|z|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=5$

PROPIEDADES

$\forall z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m \in C$ se cumple que:

1. $|z_1.z_2| = |z_1||z_2|$ o $|z_1.z_2 \cdots z_m| = |z_1||z_2| \cdots |z_m|$

2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, si $z_2 \neq 0$

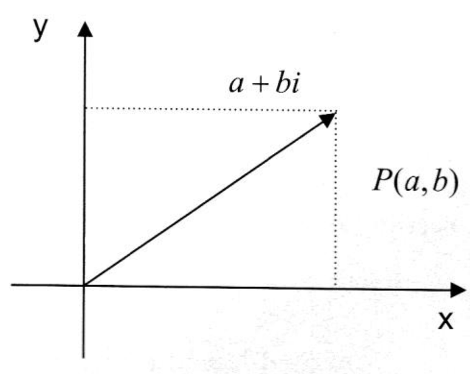
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ o $|z_1 + z_2 + \cdots + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|$

4. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ o $|z_1 z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

REPRESENTACION EN EL PLANO CARTESIANO

Todo número complejo de la forma $a + bi$ se puede asociar a un par ordenado único (a, b). En el sistema cartesiano, el eje horizontal, eje x, se llana **eje real**, y el eje vertical, eje y, se llama **eje imaginario**. De este modo cada complejo puede asociarse a un punto único en un sistema de coordenadas cartesianas. Recíprocamente, a cada punto se asocia un número complejo único. En este caso el plano cartesiano recibe el nombre de **plano complejo** o **diagrama de Argand.**

Gráficamente:



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

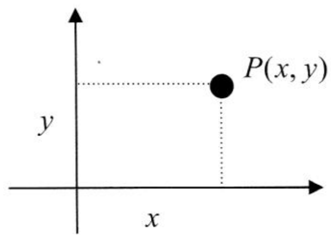
La distancia entre dos puntos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ en el plano complejo está dada por:

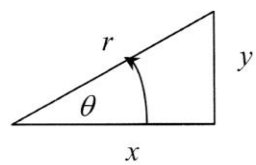
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

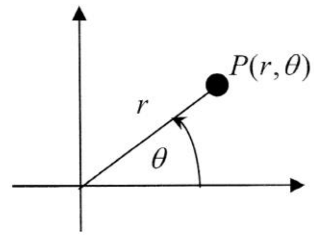
FORMA TRIGONOMETRICA DE NUMEROS COMPLEJOS

En el plano complejo cada punto determina un segmento rectilíneo dirigido único, que parte del origen (o polo, O) y termina en el punto. Tal segmento dirigido es semejante a los que representan los vectores. En este caso se tiene el vector polar OP. Las relaciones entre los dos grupos de coordenadas se puede observar a continuación.

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \frac{y}{r} = sen\theta$$







El número complejo $x + yi$ puede representarse en términos de r y θ.

$$x + yi = (r\cos\theta) + (rsen\theta)i$$

$$x + yi = r(\cos\theta + isen\theta)$$

Esta expresión se abrevia como

$$rcis\theta = r(\cos\theta + isen\theta)$$

y se llama forma polar o forma trigonométrica del número complejo $x + yi$. En este caso r se llama módulo y θ argumento.

Formas rectangular y polar de Números complejos

$$x + yi = rcis(\theta + 2k\pi)$$

o bien,

$$r\,cis\left(\theta + 360^o k\right) \text{ para cualquier entero } k$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ x = r\cos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo

Expresar $1+i$ en la forma polar.

Solución:

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{1}{1}=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$$

Ejemplo

Expresar $\sqrt{6}cis\frac{2\pi}{3}$ en la forma rectangular.

Solución:

$$x=\sqrt{6}\cos\frac{2\pi}{3}=\sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$y=\sqrt{6}sen\frac{2\pi}{3}=\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{6}cis\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

La forma polar de un número complejo ofrece ventajas notables sobre la forma rectangular, en los casos de multiplicación división. Esta forma también facilita la extracción de raíces de números complejos. El detalle consta a continuación.

Producto y cociente de complejos en la forma polar

1. Producto

$$(r_1cis\theta_1)(r_2cis\theta_2)=r_1r_2cis(\theta_1+\theta_2)$$

2. Cociente

$$\frac{r_1cis\theta_1}{r_2cis\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}cis(\theta_1-\theta_2)$$

Ejemplos

1. $\left(2cis45^0\right)\left(3cis30^0\right)=6cis75^0$

2. $\dfrac{15cis\,\pi/2}{3cis\,\pi/3}=\dfrac{15}{3}cis\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=5cis\dfrac{\pi}{6}$

3. $\dfrac{12cis\,63^0}{18cis\,87^0}=\dfrac{12}{18}cis\left(63^0-87^0\right)=\dfrac{2}{3}cis\left(-24^0\right)=\dfrac{2}{3}cis\left(336^0\right)$

TEOREMA **Teorema de Demoivre**

$$\left(rcis\theta\right)^n=r^n cis\,n\theta$$

donde $n\in N$

Ejemplo

Evaluar $\left(1+i\sqrt{3}\right)^8$

Solución:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^8=\left(2cis\dfrac{\pi}{3}\right)^8$$

Usando el teorema de DeMoivre

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^8=2^8cis8\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=256cis\dfrac{8\pi}{3}$$

$$=-128+128\sqrt{3}i$$

TEOREMA **Raíz n-ésima de un número complejo**

$$\left(rcis\theta\right)^{1/n}=r^{1/n}cis\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

donde $n\in N\wedge k=0,1,2,\cdots$

Ejemplo

Obtener las raíces cúbicas de 1 y luego escribirlas en la forma rectangular.

Solución:

$1 = 1 + 0i = 1cis0$

Si z es la raíz cúbica y aplicando el teorema de la raíz n-ésima

$$z = (1\,cis\,0)^{1/3} = 1^{1/3} cis\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) = cis\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

Para encontrar las tres raíces se hace $k = 0,1,2$

Si $k = 0$, $\quad z_1 = cis\left(\frac{2\pi.0}{3}\right) = cis\,0 = 1 + 0i$

Si $k = 1$, $\quad z_2 = cis\left(\frac{2\pi.1}{3}\right) = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 2$, $\quad z_3 = cis\left(\frac{2\pi.2}{3}\right) = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Las raíces cúbicas de 1 son $1 + 0i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ejemplo

Obtener las raíces quintas de $-1 + i$

Solución:

$-1 + i = \sqrt{2}cis\,135^0$

$$z = \left(2^{1/2}\,cis\,135^0\right)^{1/5} = \left(2^{1/2}\right)^{1/5} cis\left(\frac{135^0 + 360^0 k}{5}\right)$$

Si $k = 0$ $\quad z_1 = 2^{1/10} cis\,27^0$

Si $k = 1$ $\quad z_2 = 2^{1/10} cis\,99^0$

Si $k = 2$ $\quad z_3 = 2^{1/10} cis\,171^0$

Si $k = 3$ $\quad z_4 = 2^{1/10} cis\,243^0$

Si $k = 4$ $\quad z_5 = 2^{1/10} cis\,315^0$

Las raíces están igualmente espaciadas alrededor de un círculo con radio $2^{1/10}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el complejo

$$z = \sum_{k=0}^{100} i^k$$

2. Resolver

$(\bar{z})^2 - z = 0$, si $z = a + bi$

3. Hallar a y b tales que

$$a + bi = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{i^8 - i^{15}}}$$

4. Hallar el valor de

$i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

5. Hallar el valor de

$i^5 - i^6 + i^7 - i^8$

6. Hallar el valor de $E = \dfrac{1}{\bar{z}} + 1$, conociendo que $z = 1 + i$

7. Hallar el valor de $E = \dfrac{1}{z} + \bar{z}$, conociendo que $z = 1 + i$

8. Efectuar

$i(4 + 3i) - i(1 - 9i)$

9. Efectuar

$(5 - \sqrt{3}i)(-2 + \sqrt{3}i)$

10. Efectuar

$\dfrac{2 - i}{1 + i} + \dfrac{3 - 4i}{4 + 3i}$

11. Efectuar

$$\frac{(a+ib)^2}{a-ib}-\frac{(a-ib)^2}{a+ib}$$

12. Hallar la parte real de número complejo

$$z=\frac{(3+2i)i^{17}}{i^{243}(1-i)^3}$$

13. Hallar el valor de

$$E=\frac{i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{666}}{i^{18}-i^5-i^3+i^2-1}$$

14. Sea la expresión $E=\dfrac{1-2ai}{2-i}$. Para qué valores de a E es:

a) un número real,

b) un número imaginario puro.

15. Resolver

$z^2-2z+26=0$

16. Resolver

$$z^2 + (2i - 3)z + (5 - i) = 0$$

17. Resolver

$|z - i| - |z + i| = 2$, si $z = a + bi$

18. Cuando la luz pasa de u medio a otro, por ejemplo del aire al agua, se refracta (o desvía) y parte de ella se absorbe. Este fenómeno puede describirse por medio del índice de refracción n y un coeficiente de absorción k; los ingenieros han encontrado útil cambiarlos en un índice de refracción complejo

$$m = n - ki\,.$$

En los tratados teóricos sobre la retrodispersión del radar por medio de gotitas de lluvia, la expresión

$$k = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2}$$

es importante. Hallar k si el índice de refracción complejo m es 5-3i.

19. Si $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones:

a) $|3z_1 - 4z_2|$

b) $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$

c) $(\bar{z})^4$

d) $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|^2$

20. Encontrar los números reales x y y tales que $x + 2iy - ix + 3y = 2 - 3i$

21. Encontrar los números reales x y y tales que $(x + y - 1, x - y + 1) = (1, -1)^{-1}$.

22. Efectuar

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$$

23. Resolver

$$z^3-8i=0$$

24. Resolver

$$z^6+1=0$$

5. Determinar las raíces cuadradas de

$$E=\frac{z}{2\bar{z}}\ ,\ \text{si}\ z=1-i$$

26. Determinar las raíces quintas de 32 usando el teorema de la raíz n-ésima.

27. Las raíces de cierto número complejo son los vértices de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Uno de los vértices tiene como argumento $\frac{\pi}{6}$. Hallar el radicando y la forma polar de todas las raíces.

Capítulo 5

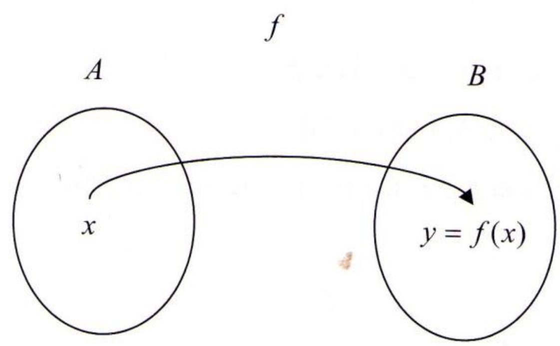
FUNCIONES REALES

DEFINICION

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una ***función*** f de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in A, \exists y \in B$ tal que $(x, y) \in f$
2. Si $(x, y), (x, z)$ son elementos de f, entonces $y = z$

Gráficamente:



Observaciones

1. La primera propiedad afirma que todo elemento de A debe estar en correspondencia con al menos un elemento de B.
2. La segunda propiedad afirma que cada elemento de A no puede estar en correspondencia con dos o más elementos del conjunto B, ó, a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

El dominio de f se nota con D_f.

El conjunto B se denomina conjunto de llegada de f.

Si $(x, y) \in f$, se dice que "y es la imagen de x bajo f" y se escribe $y = f(x)$.

Se observa que si $x \in A \to f(x) \in B.$ Entonces:

$$D_f = \{x \in A : (x,y) \in f\}$$

Notación. Para indicar que f es una función de A en B se usa la siguiente notación:

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

El conjunto formado por todos los elementos de B que son imágenes de los elementos de A se denomina rango o recorrido de la función f.

El recorrido de f se nota con R_f, es decir:

$$R_f = \{y \in B : y = f(x) \wedge x \in A\},\ R_f \subseteq B$$

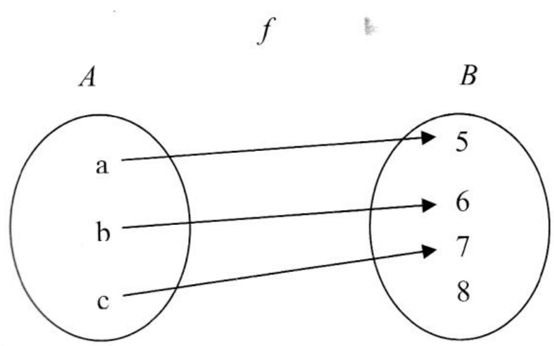
Ejemplos

Sean los conjuntos $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{5,6,7,8\}$

1. Una función f de A en B está dada por:

$$f = \{(a,5),(b,6),(c,7)\}$$

Esta correspondencia se puede ver en la siguiente figura:



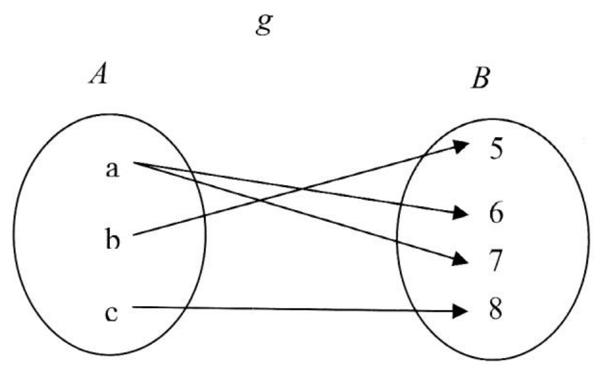
Se puede escribir que:

$$\begin{aligned} a &\mapsto f(a) = 5 \\ b &\mapsto f(b) = 6 \\ c &\mapsto f(c) = 7 \end{aligned}$$

$D_f = \{a,b,c\}$ $\qquad$ $R_f = \{5,6,7\}$

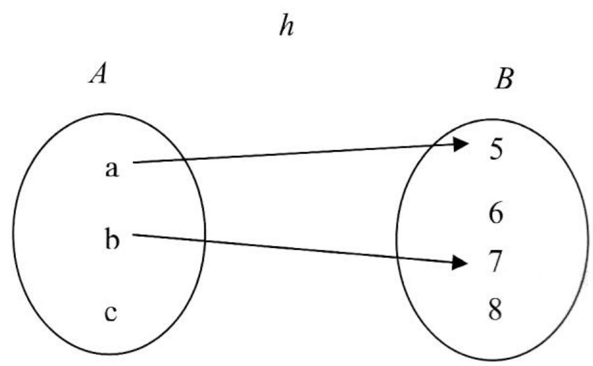
2. Sea g el subconjunto de $A \times B$ dado por $g = \{(a,6),(a,7),(b,5),(c,8)\}$

Se observa que al elemento a se le asignan dos elementos del conjunto B. Por lo tanto g no es función.



3. Sea h el subconjunto de $A \times B$ dado por $h = \{(a,5),(b,7)\}$.

Se observa que h no es función, puesto que el elemento c no está asociado con ningún elemento de B.



Observaciones

1. Las funciones reales son subconjuntos de R^2 y se representan en el plano cartesiano.
2. El dominio de una función f, gráficamente, está constituido por los puntos x, tales que la vertical que pasa por x corta en un punto a la gráfica de la función f.
3. El recorrido de una función f, gráficamente, está constituido por los puntos y, tales que la horizontal que pasa por y corta en un punto a la gráfica de la función f.

4. Para determinar el dominio de una función real, en la expresión $y = f(x)$, se establecen los valores reales para la variable x, que hacen que y sea real.
5. Para determinar el recorrido de una función real, en la expresión $y = f(x)$, se despeja x, y se establecen los valores reales para la variable y, que hacen que x sea real.

Ejemplo

Determinar el dominio y el recorrido de la siguiente función

$f : R \to R$

$x \mapsto y = x^2$

Solución:

$y = x^2$, entonces $D_f = R$

$|x| = \sqrt{y}$, entonces $R_f = R^+ \cup \{0\}$

Ejemplo

Determinar el dominio y el recorrido de la siguiente función

$f : A \to R$

$x \mapsto y = \sqrt{3x - 2}$

Solución:

D_f : La raíz cuadrada existe si

$3x - 2 \geq 0$

$x \geq \frac{2}{3}$

$D_f : \forall x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

R_f : Se construye la función a partir del dominio

$x \geq 3$

$3x \geq 2$

$3x - 2 \geq 0$

$\sqrt{3x - 2} \geq 0$

$y \geq 0$

$R_f : \forall y \in [0, +\infty[$

FUNCIONES BIYECTIVAS E INVERSAS

FUNCION INYECTIVA

DEFINICION

Sea f una función de A en B. Se dice que f es una ***función inyectiva*** si se verifica la siguiente condición:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Recordando que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ la función inyectiva también puede expresarse como:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

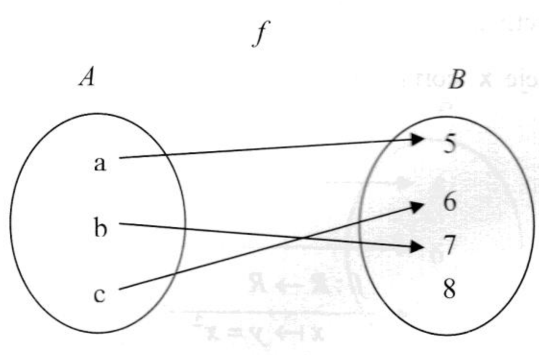
Es decir, una función f es inyectiva si a elementos diferentes de A corresponden imágenes diferentes, o, si a imágenes iguales corresponden elementos iguales de A.

Ejemplos

Sean los conjuntos $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{5,6,7,8\}$.

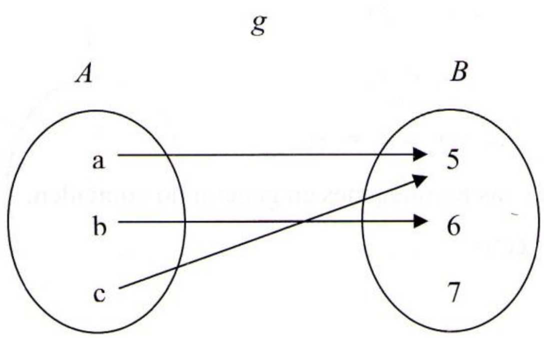
Se definen las siguientes funciones:

1.



La función f es inyectiva ya que a elementos diferentes les corresponden imágenes diferentes.

2.



La función g no es sobreyectiva ya que $R_f \subset B$.

3. Sea la función

$f : R \to R$

$x \mapsto y = ax + b$

La función f es sobreyectiva ya que $R_f = B$

FUNCION BIYECTIVA

DEFINICION

Sea f una función de A en B. Se dice que f es una ***función biyectiva*** si se verifican la siguientes condiciones:

1. f es inyectiva
2. f es sobreyectiva

Si f es biyectiva, para cada $y \in B$, $\exists! x \in A$ tal que $y = f(x)$

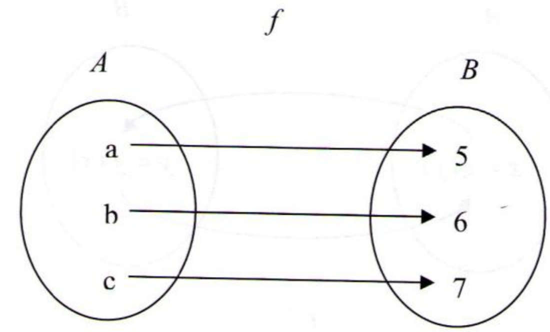
Ejemplos

Sean los conjuntos

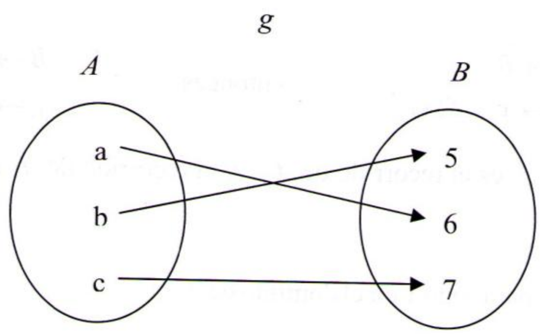
$A = \{a, b, c\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$.

En las siguientes figuras se ilustran algunas funciones biyectivas de A en B

1.



2.



3. Sea la función

$f : R \to R$

$x \mapsto y = ax + b$

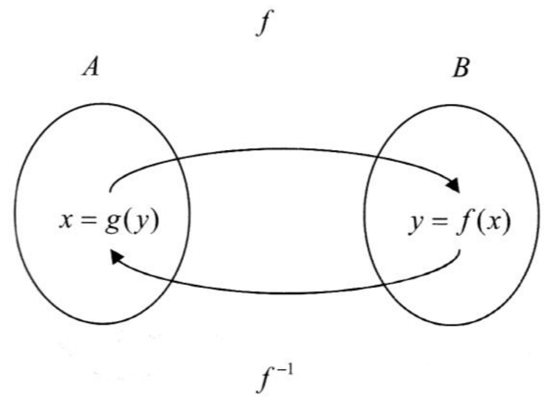
La función f es biyectiva ya que es inyectiva y sobreyectiva.

FUNCION INVERSA

DEFINICION

Sea f una función biyectiva de A en B. El conjunto $g = \{(x, y) : y = f(x),\ x \in A\}$ es una función de B en A y se denomina ***función inversa*** de la función f. La función inversa de f se nota por f^{-1}, es decir, $g = f^{-1}$.

Gráficamente:



Observaciones

1. $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$

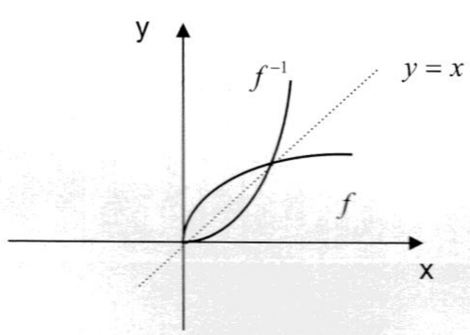
2. Si $\begin{array}{l} f : A \to B \\ \quad x \mapsto y = f(x) \end{array}$, entonces $\begin{array}{l} f^{-1} : B \to A \\ \quad y \mapsto x = f^{-1}(y) \end{array}$

   El dominio de f es el recorrido de f^{-1} y el recorrido de f es el dominio de f^{-1}.

3. $f^{-1}(f(x)) = x$, para todo x en el dominio de f.

   $f(f^{-1}(y)) = y$, para todo y en el dominio de f^{-1}.

4. Los gráficos de f y f^{-1} son simétricos respecto a la recta $y = x$. Así:



Ejemplo

Sea la función biyectiva

$$\begin{array}{l} f : [2. +\infty[\to [0,+\infty[\\ \qquad\qquad x \mapsto y = \sqrt{x^2 - 4} \end{array}$$

Hallar su inversa.

Solución:

$y = \sqrt{x^2 - 4}$,

Se despeja x

$|x| = \sqrt{y^2 + 4}$

$x = \sqrt{y^2 + 4} \vee x = -\sqrt{y^2 + 4}$

Prevalece la función positiva pues $x \in [2, +\infty[$, entonces

$$f^{-1} : [0. + \infty[\to [2, +\infty[$$
$$y \mapsto x = \sqrt{y^2 + 4}$$

Cambiando las variables:

$$f^{-1} : [0. + \infty[\to [2, +\infty[$$
$$x \mapsto y = \sqrt{x^2 + 4}$$

FUNCION REAL

DEFINICION

Sean A y B subconjuntos de los reales, entonces $f : A \to B$ se llama función real.

Todas las funciones que se consideran en lo sucesivo son funciones reales.

FUNCIONES MONOTONAS

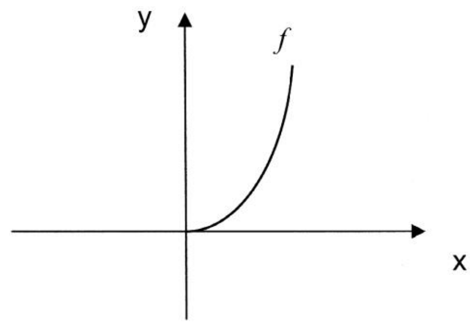
DEFINICION

Sea f una función definida sobre un conjunto A de R.

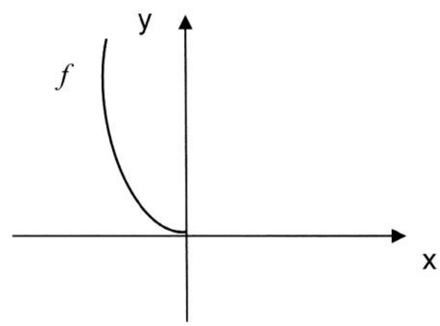
1. f es creciente si: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$. Se nota por: $f \uparrow A$.
2. f es decreciente si: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$. Se nota por: $f \downarrow A$.

Una función que es creciente o decreciente en A se denomina ***función monótona*** en A

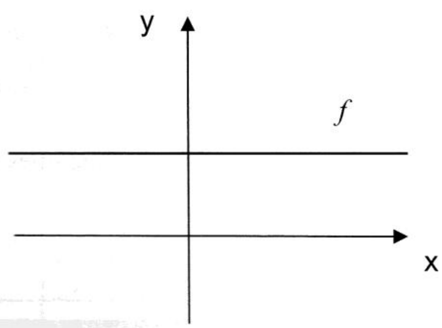
Las siguientes graficas ilustran esta definición.



f es creciente



f es decreciente



f es creciente y decreciente, entonces f es constante

Ejemplo

Sea la función
$$\begin{aligned} f &: R \to R \\ x &\mapsto y = 3x - 2 \end{aligned}$$

Demostrar que f es creciente en los reales.

Solución:

P.D. $\forall x_1, x_2 \in R,\ x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$

$$x_1 < x_2$$

$$3x_1 < 3x_2$$

$$3x_1 - 2 < 3x_2 - 2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Por lo tanto f es creciente en los reales.

Ejemplo

Sea la función
$$f : R \to R$$
$$x \mapsto y = x^2$$

Demostrar que f es decreciente en R^-.

Solución:

P.D. $\forall x_1, x_2 \in \left]-\infty, 0\right[,\ x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$

$$x_1 < x_2 < 0$$

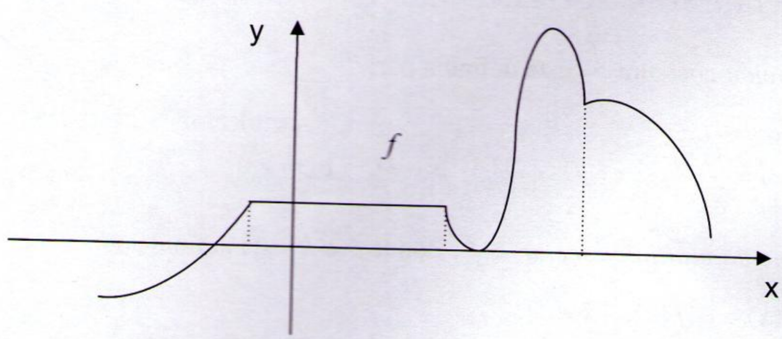
$$x_1^2 > x_2^2 > 0$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Por lo tanto f es decreciente en $\left]-\infty, 0\right[$.

DEFINICION

Sea f una función definida sobre un conjunto A de R se dice ***monótona a trozos*** si existen subconjuntos de A en cada uno de los cuales f es monótona.



Observación

Determinar los intervalos de monotonía de una función es precisar los intervalos para los cuales la función es creciente, decreciente o constante.

TEOREMA

Sea f una función real de A en B

1. Si f es creciente (respectivamente decreciente) entonces f es inyectiva.
2. Si f es biyectiva y creciente (respectivamente decreciente) entonces f^{-1} es creciente (respectivamente decreciente).

OPERACIONES CON FUNCIONES

DEFINICIONES

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones reales. Entonces,

1. La ***función suma*** $f + g$ está definida por:

   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, si $x \in D_f \cap D_g$
2. La ***función diferencia*** $f - g$ está definida por:

   $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, si $x \in D_f \cap D_g$
3. La ***función producto*** $f.g$ está definida por:

   $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, si $x \in D_f \cap D_g$
4. La ***función cociente*** $\dfrac{f}{g}$ está definida por:

   $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, si $x \in D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = 0\}$
5. La ***función múltiplo escalar*** $\alpha.f$, donde $\alpha \in R$ está definida por:

   $(\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$, si $x \in D_f$

Ejemplo

Sean las funciones

$$f: R \to R \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad g: R \to R$$
$$x \mapsto y = x^2 + 1 \qquad\qquad\qquad x \to y = x^2 - 1$$

Hallar $\dfrac{f}{g}$ y su dominio.

Solución:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$x \in D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\}$$

$$x \in R \cap R - \{x : x^2 - 1 = 0\}$$

$$x \in R - \{-1,1\}$$

$$\frac{f}{g} : R - \{-1,1\} \to R$$
$$x \mapsto y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

COMPOSICION DE FUNCIONES

DEFINICION

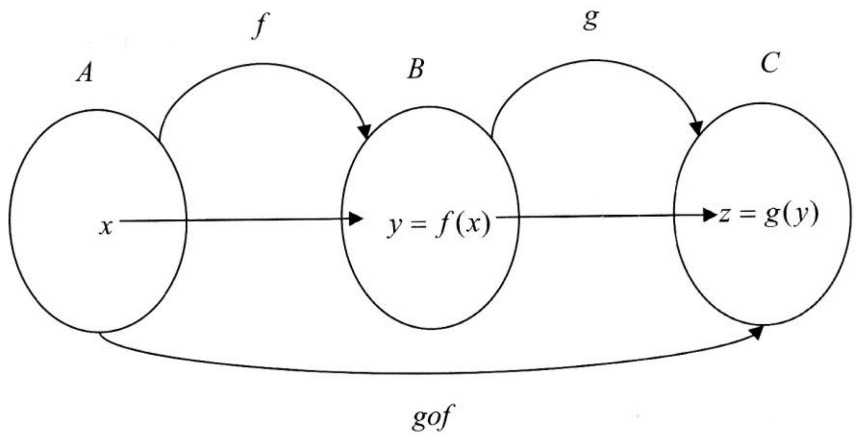
Sean A, B, C conjuntos, f una función de A en B y g una función de B en C.

La función $h: A \to C$ definida por $h(x) = g(f(x))$ se denomina función compuesta de f y g. La función h se nota por gof, es decir, $h = gof$ (que se lee "g compuesta con f").

Sea $x \in A$, la función f transforma a x en $f(x) = y \in B$, y la función g transforma a y en $z = g(y) \in C$. Esto se puede expresar afirmando que gof transforma a $x \in A$ en $g(f(x)) \in C$.

De la definición de función compuesta se tiene que $(gof)(x) = g(f(x))$.

Gráficamente:



Observaciones

1. Para definir la función compuesta gof debe cumplirse que $R_f \subseteq D_g$.

   El dominio de gof se expresa así:

   $D_{gof} = \{x : f(x) \in R_f \cap D_g\}$

2. $gof \neq fog$

Ejemplo

Sean

$$\begin{array}{ll} f : R \to R & g : R \to R \\ x \mapsto y = x^2 + 1 , & x \to y = x^2 - 1 \end{array}$$

Hallar gof y su dominio.

Solución:

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)^2 - 1\end{aligned}$$

$D_{gof} = R$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l} gof : R \to R \\ \quad x \mapsto y = (x^2 + 1)^2 - 1 \end{array}$$

DEFINICION

Sea el conjunto $A \subseteq R$, la **función identidad** sobre A, es

$$\begin{aligned} I_A : A &\to A \\ x &\mapsto y = x \end{aligned}$$

TEOREMA

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva, entonces

$$f^{-1}of = I_A \quad \text{y} \quad fof^{-1} = I_B$$

Observaciones

1. $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$
2. $(fof^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f^{-1}(x) = y$

TEOREMA

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones reales biyectivas, entonces, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

TEOREMA

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones reales. Entonces,

1. Si f es creciente y g creciente gof es creciente.
2. Si f es creciente y g decreciente gof es decreciente.
3. Si f es decreciente y g creciente gof es decreciente.
4. Si f es decreciente y g decreciente gof es creciente.

TEOREMA

Sean $f: A \to B$, $g: A \to C$ funciones reales crecientes en A, entonces

1. $-f$ es decreciente en A
2. $f+g$ es creciente en A
3. $\dfrac{1}{f}$ es decreciente en A, si $\forall x \in A: f(x) > 0 \vee \forall x \in A: f(x) < 0$
4. $f.g$ es creciente en A, si $\forall x \in A: f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0$

   $f.g$ es decreciente en A, si $\forall x \in A: f(x) \leq 0 \wedge g(x) \leq 0$

TEOREMA

Sean $f: A \to B$, $g: A \to C$ funciones reales decrecientes en A, entonces

1. $-f$ es creciente en A
2. $f+g$ es decreciente en A
3. $\dfrac{1}{f}$ es creciente en A, si $\forall x \in A: f(x) > 0 \vee \forall x \in A: f(x) < 0$
4. $f.g$ es decreciente en A, si $\forall x \in A: f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0$

   $f.g$ es creciente en A, si $\forall x \in A: f(x) \leq 0 \wedge g(x) \leq 0$

FUNCIONES PARES E IMPARES

DEFINICION

Sea $A \subseteq R$, tal que $x \in A, -x \in A$ y f es una función real definida en A. Se dice que:

1. f es una ***función par*** si y solo sí $\forall x \in A,\ f(-x) = f(x)$
2. f es una ***función impar*** si y solo sí $\forall x \in A,\ f(-x) = -f(x)$

Observación

Si una función no es par ni impar se dice que no tiene paridad.

Ejemplo

Sea

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Determinar si f es par, impar o no tiene paridad si:

a) $y = x^2$

b) $y = x^3$

c) $y = |x|$

d) $y = x^3 + x^2$

Solución:

a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, entonces

f es par.

b) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, entonces

f es impar.

c) $f(-x) = |-x| = |-1||x| = |x| = f(x)$, entonces

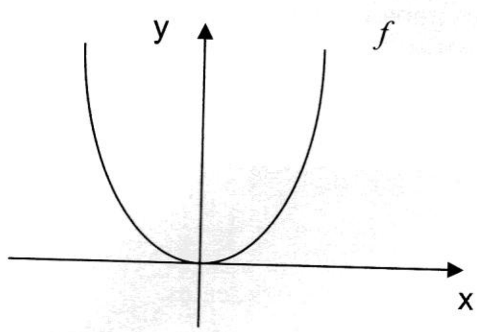
f es par

c) $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$, entonces

f no tiene paridad

Observaciones

1. La grafica de una función par es simétrica respecto al eje y.



Por tanto si f es par en un conjunto A es suficiente estudiar la función sobre $A \cap [0,+\infty[$ y completar la grafica mediante una simetría resprecto al eje y.

MAXIMOS Y MINIMOS

DEFINICIONES

Sea $f : A \to R, A \subseteq R$,

1. f tiene ***un máximo absoluto*** en A, si existe por lo menos un $b \in A$ tal que:

   $\forall x \in A, f(x) \leq f(b)$, entonces

   $f(b)$ es el máximo absoluto.

2. f tiene un ***mínimo absoluto*** en A, si existe por lo menos un $c \in A$ tal que:

   $\forall x \in A, f(c) \leq f(x)$, entonces

   $f(c)$ es el mínimo absoluto.

3. f tiene un ***máximo relativo*** en $d \in A$, si existe un intervalo abierto I que contiene a d tal que:

   $\forall x \in I \cap A, f(x) \leq f(d)$, entonces

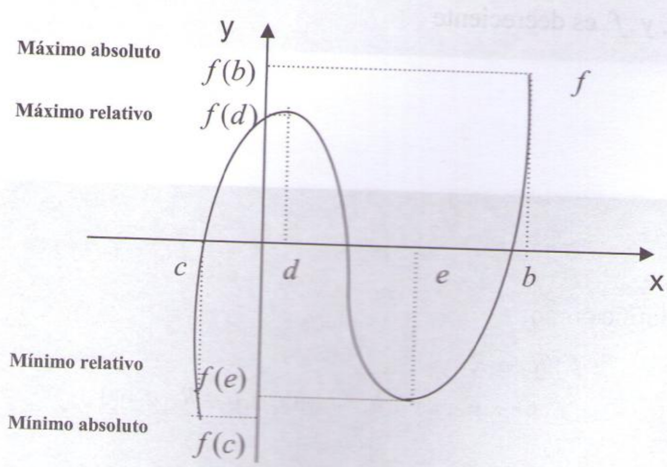
   $f(d)$ es el máximo relativo.

4. f tiene un ***mínimo relativo*** en $e \in A$, si existe un intervalo abierto I que contiene a e tal que:

   $\forall x \in I \cap A, f(e) \leq f(x)$, entonces

   $f(e)$ es el mínimo relativo.

La siguiente figura ilustra las definiciones dadas:



MAXIMOS Y MINIMOS

DEFINICIONES

Sea $f : A \to R, A \subseteq R$,

1. f tiene ***un máximo absoluto*** en A, si existe por lo menos un $b \in A$ tal que:

   $\forall x \in A, f(x) \leq f(b)$, entonces

   $f(b)$ es el máximo absoluto.

2. f tiene un ***mínimo absoluto*** en A, si existe por lo menos un $c \in A$ tal que:

   $\forall x \in A, f(c) \leq f(x)$, entonces

   $f(c)$ es el mínimo absoluto.

3. f tiene un ***máximo relativo*** en $d \in A$, si existe un intervalo abierto I que contiene a d tal que:

   $\forall x \in I \cap A, f(x) \leq f(d)$, entonces

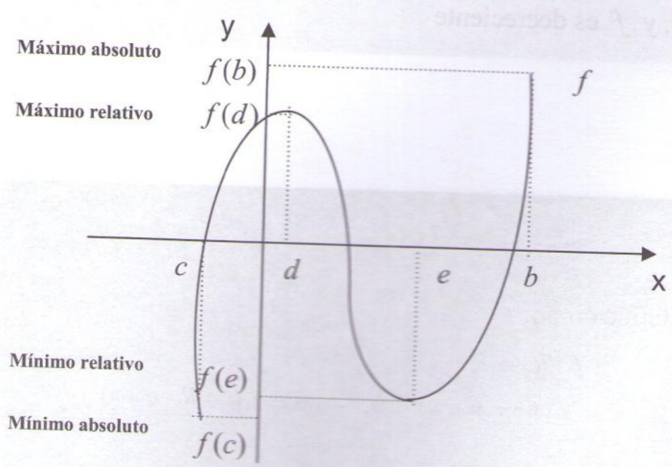
   $f(d)$ es el máximo relativo.

4. f tiene un ***mínimo relativo*** en $e \in A$, si existe un intervalo abierto I que contiene a e tal que:

   $\forall x \in I \cap A, f(e) \leq f(x)$, entonces

   $f(e)$ es el mínimo relativo.

La siguiente figura ilustra las definiciones dadas:



ALGUNAS FUNCIONES REALES IMPORTANTES

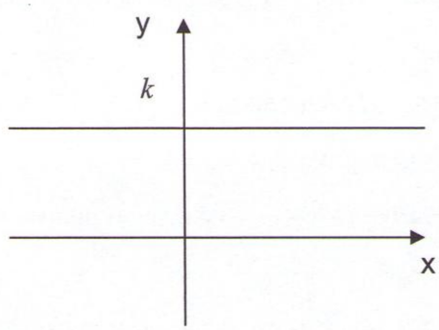
FUNCION CONSTANTE

DEFINICION

La ***función constante*** se define como:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto y = k, \text{ donde } k \in R$$

Gráficamente:



Propiedades

1. $D_f = R,\ \ R_f = \{k\}$
2. f no es inyectiva, f no es sobreyectiva
3. f es creciente, y f es decreciente

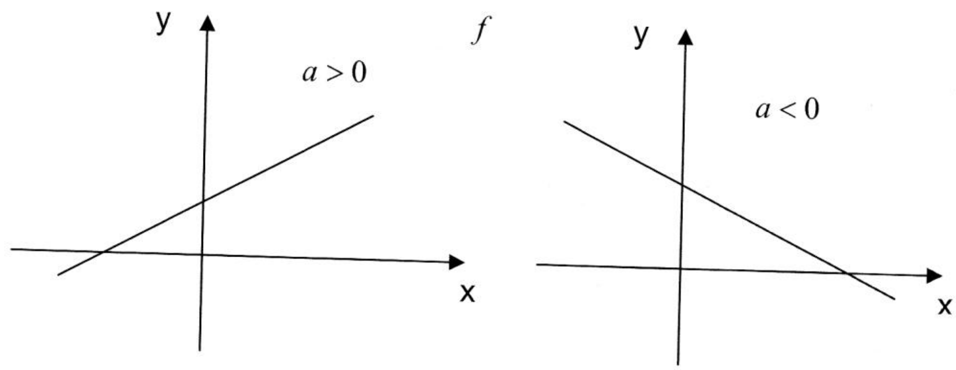
FUNCION LINEAL

DEFINICION

La ***función lineal*** se define como:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto y = ax + b, \text{ donde } a, b \in R,\ a \neq 0$$

Gráficamente:



Propiedades

1. $D_f = R,\ \ R_f = R$
2. f es biyectiva
3. Si $a > 0$ f es creciente
4. Si $a < 0$ f es decreciente
5. La raíz de la ecuación $ax + b = 0$ es $x = -\dfrac{b}{a}$.

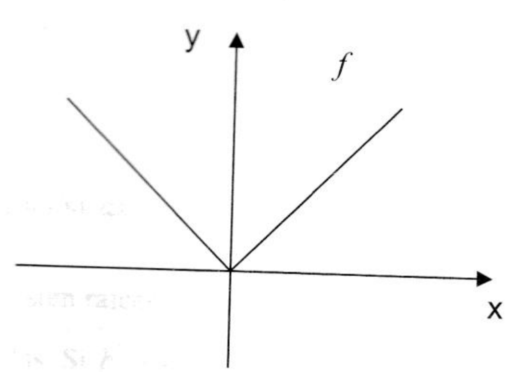
FUNCION VALOR ABSOLUTO

DEFINICION

La ***función valor absoluto*** se define como:

$$\begin{aligned} f &: R \to R \\ x &\mapsto y = |x| \end{aligned}, \text{ o también } \quad \begin{aligned} f &: R \to R \\ x &\mapsto y = \begin{cases} -x, \text{si } x < 0 \\ x, \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Gráficamente:



Propiedades

1. $D_f = R, R_f = [0,+\infty[$
2. f no es inyectiva
3. f es decreciente en $]-\infty,0]$
4. f es creciente en $[0,+\infty[$
5. f es par
6. f tiene un mínimo en $x = 0$.

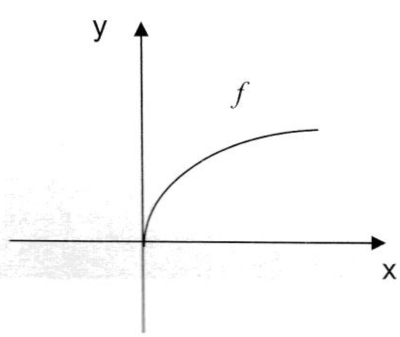
FUNCION RAIZ CUADRADA

DEFINICION

La ***función raíz cuadrada*** se define como:

$$f : R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$$
$$x \mapsto y = \sqrt{x}$$

Gráficamente:



Propiedades

1. $D_f = R^+ \cup \{0\}, R_f = R^+ \cup \{0\}$
2. f es biyectiva
3. f es creciente
4. f tiene un mínimo en $x = 0$.

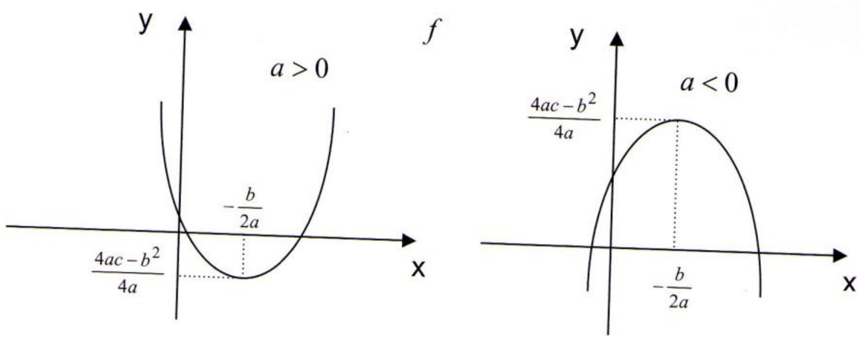
FUNCION CUADRATICA

DEFINICION

La ***función cuadrática*** se define como:

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c, \quad \text{donde } a,b,c \in R,\ a \neq 0$$

Gráficamente:



Propiedades

1. $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ es **forma normalizada** de la función cuadrática.

2. Si $a > 0$, f es decreciente en $\left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$, y es creciente en $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[$

3. Si $a > 0$, f tiene un mínimo en $x = -\dfrac{b}{2a}$

4. Si $a < 0$, f es creciente en $\left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$, y es decreciente en $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[$

5. Si $a < 0$, f tiene un máximo en $x = -\dfrac{b}{2a}$

6. $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

7. Las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

   Si $b^2 - 4ac > 0$, existen raíces reales diferentes. Si $b^2 - 4ac < 0$, existen raíces complejas conjugadas. Si $b^2 - 4ac = 0$, existen raíces repetidas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt{2-\frac{x-5}{x-1}}$$

2. Determinar el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt{\frac{\left|2x^2+10x+8\right|}{x^2-x-6}}$$

3. Determinar el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt{\frac{|x|-x+1}{x^2+x-6}}$$

4. Determinar el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt{3x-3-|x^2-2x-3|}$$

5. Determinar el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

6. Determinar el dominio de f

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}+\sqrt{\frac{2+|x|}{2-|x|}}$$

7. Determinar el recorrido de la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}-2, & si\ |x|>2\\ \dfrac{x}{2x-4}, & si\ |x|<2\end{cases}$$

8. Determinar el recorrido de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{4-x^2}-x}$$

9. Determinar el recorrido de la siguiente función

$f(x) = x^2 - |4x - 4|$

10. Determinar el recorrido de la siguiente función

$f(x) = \left|\dfrac{x}{2 - x}\right|, \ si \ x < 1$

11. Determinar el recorrido de la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x}{3-x}}, & si\ \ x\in[1,3[\\ \sqrt[3]{\dfrac{-1}{x}}, & si\ \ x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,1\right[\end{cases}$$

12. Determinar el dominio y el recorrido de la siguiente función

$$f(x)=\frac{x+6}{2x-4}$$

13. Determinar el dominio y el recorrido de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - \frac{3}{x}}$$

14. Redefinir la siguiente función para que sea biyectiva y hallar su inversa

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & si \ \ x < 1 \\ x^2 - 3x + 2, & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

15. Sea la función

$$f : \left]-\infty,-1\right[\cup [1,5] \to R$$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{si } x < -1 \\ 2 - 2x, & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

a) Demostrar que f es inyectiva

b) Hallar la inversa de f

16. Sea la función

$$f : \left]-\infty,-1\right[\to R$$

$$x \mapsto y = \frac{3}{1-x^2}$$

a) Demostrar que f es inyectiva

b) Hallar la inversa de f

17. Sea la función

$$f : \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1,+\infty\right[\to R$$

$$x \mapsto y = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Transformar f en función biyectiva y hallar su inversa.

18. Sea la función

$$f : \left]-\infty, 0\right] \to R$$

$$x \mapsto y = \sqrt{x^2+1}$$

Transformar f en función biyectiva y hallar su inversa.

19. Sea la función

$f : R \to R$

$$x \mapsto y = \begin{cases} -x^2 + 2x - 2, & si \ \ x < -1 \\ 2x + 4, & si \ \ x \geq -1 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva, si no lo es redefinir y hallar su inversa

20. Sea la función

$f : R \to \left]-1,1\right[$

$$x \mapsto y = \frac{x}{1+|x|}$$

a) Determinar si f es biyectiva

b) Hallar la inversa

21. Determinar los intervalos de monotonía de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5} - 2} \text{ si } |x| > 3$$

22. Analizar la monotonía de f

$$f : [-3,2[\to R$$
$$x \mapsto y = \sqrt{\frac{x+3}{2-x}}$$

23. Analizar la monotonía de f

$$f(x) = 3 + \frac{1}{4 + x^2}$$

24. Analizar la monotonía de f

$$f : [2,+\infty[\to R$$
$$x \mapsto y = x^2 - 3x - 4$$

25. Analizar la monotonía de f

$$f(x)=\begin{cases}|3-2x|, & si\ \ x\geq 2\\ -x^2+2x+3. & si\ \ x<2\end{cases}$$

26. Analizar la monotonía de f

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\ \text{, si }\ x\in\left]-1,0\right]$$

27. Determinar $\frac{f}{g}$ si:

$f: \left]-\infty,5\right] \to R$

$$x \mapsto y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & si\ x < 0 \\ -x^2, & si\ 0 \le x \le 5 \end{cases}$$

$g: \left[-1,+\infty\right[\to R$

$$x \mapsto y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & si\ -1 \le x \le 1 \\ 2, & si\ x > 1 \end{cases}$$

8. Sean las funciones

$f(x) = 3x^2 - 1$, si $x \ge -1$

$g(x) = |x-2| - 2$, si $x \le 10$

Hallar fog y su dominio.

29. Sean

$$f : R \to R \qquad\qquad g : R \to R$$

$$x \mapsto y = 1 - x^2 \qquad\qquad x \mapsto y = \begin{cases} \sqrt{3x-6}, & si\ \ x \geq 2 \\ 0, & si\ \ x < 2 \end{cases}$$

Hallar gof y su dominio.

30. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 2x}, & si\ \ 0 < x \leq 2 \\ 1, & si\ \ x \leq 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = |x+3|,\ \text{si}\ \ x \in R$$

Hallar fog y su dominio.

31. Sean las funciones

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & si\ \ x\geq -1\\ x, & si\ \ -5\leq x\leq -4\end{cases} \qquad g(x)=-x^2+1, \forall x\in R$$

Hallar fog y su dominio.

2. Sean las funciones

$f:R\rightarrow R$

$$x\mapsto y=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1}, & si\ \ x>1\\ -\sqrt{1-x}, & si\ \ x\leq 1\end{cases} \qquad \begin{aligned} g:\,]0,+\infty[&\rightarrow R\\ x&\mapsto y=x+1\end{aligned}$$

Hallar gof y su dominio.

33. Sean las funciones

$f: \left]-\infty, 3\right] \to R$

$$x \mapsto y = \begin{cases} x^2 - x, & \text{si } x < 0 \\ -2x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$g: \left]-\infty, 5\right[\to R$

$$x \mapsto y = 3x, \ \text{si } x \geq -1$$

Hallar:

a) fog y su dominio.

b) gof y su dominio.

34. Determinar si la función dada es par, impar o no tiene paridad.

a) $f(x)=\frac{1}{x}-x^3$

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2}}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2}}$

d) $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^3}$

35. Sea $n \in Z^{+}$. Demostrar que la función f definida por $f(x) = x^{n}$ es par si n es par y es impar si n es impar.

36. Sean las funciones reales f y g, estudiar la paridad de la función g cuando f es par y cuando f es impar.

$$g(x) = \frac{|f(x)|}{f(|x|)}$$

37. Sean las funciones reales f y g creciente y decreciente respectivamnente.

Determinar la monotonía de las funciones $\dfrac{f}{g}$ y $f-g$ en el intervalo $[0,1]$ si:

$\forall x \in [0,1]: f(x) > 0 \wedge g(x) > 0.$

38. Analizar la monotonía de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

39. Analizar la monotonía de f

$$f:[-1,1]\to R$$
$$x \mapsto y=\sqrt{1-x^2}$$

40. Analizar la monotonía de f

$$f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}\,,\ \forall x\in[-1,1]$$

41. Analizar la monotonía de f

$$f(x)=\left|x^2-3x+1\right|,\ \forall x\in R$$

42. Analizar la monotonía de f

$$f(x)=\left|1-3x-x^2\right|,\ \forall x\in R$$

43. Analizar la monotonía de f

$$f : [2,+\infty[\to R$$
$$x \mapsto y = |x^2 - 3x - 4|$$

44. Analizar la monotonía de f en su dominio

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$$

Capítulo 6

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

FUNCIONES POLINOMIALES

DEFINICION

Una función f se llama ***función polinomial*** si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son números reales y n es un entero no negativo

Si $n = 0, 1, 2$, se tiene respectivamente:

$f(x) = a_0$, una **función constante**

$f(x) = a_1 x + a_0$ una **función lineal**

$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ una **función cuadrática.** También $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Con polinomios se pueden efectuar operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

TEOREMA **El algoritmo de división de polinomios**

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con $g(x) \neq 0$. Entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x)$$

donde $r(x)$ es cero, o tiene un grado menor al grado de $g(x)$.

Se llama a $f(x)$ **dividendo,** a $g(x)$ el **divisor,** a $q(x)$ el **cociente,** y a $r(x)$ el **residuo.**
Cuando $r(x) = 0$ se dice que $f(x)$ es divisible por $g(x)$.

TEOREMA

Sea $f(x)$ un polinomio de grado $n>0$ y sea c un número real. Entonces existe un polinomio único $q(x)$ de grado $n-1$ y un número real único r tales que

$$f(x)=(x-c)q(x)+r$$

TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

TEOREMA **Teorema del residuo**

Cuando un polinomio $f(x)$ se divide por $x-c$, el residuo r es el valor del polinomio en $x=c$, esto es,

$$f(c)=r.$$

Ejemplo

Determinar el residuo cuando $f(x)=4x^3-x^2+4$ se divide por $x-2$.

Solución:

Según el teorema del residuo

$f(2)=r$, luego

$4.2^3-2^2+4=r$, entonces

$r=32$

TEOREMA **Teorema del factor**

Un número c es una raíz de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x-c$ es un factor de $f(x)$.

Ejemplo

Determinar si $x-2$ es factor de $f(x)=x^3-3x^2+4$

Solución:

$f(2)=(2)^3-3(2)^2+4=0=r$. Según el teorema del factor $x-2$ es factor de $f(x)$.

RAICES REALES DE LOS POLINOMIOS

En este apartado se examinarán algunas técnicas para hallar raíces reales de una función polinomial de grado mayor que 2.

MULTIPLICIDAD DE LAS RAICES

Si $(x-c)^k$ es factor de un polinomio $f(x)$ y $(x-c)^{k+1}$ no es factor para k, un entero positivo, entonces se dice que c es una raíz de multiplicidad k.

Ejemplo

Si $f(x)=(x+3)^2$, se dice que -3 es una raíz de multiplicidad 2.

NUMERO DE RAICES

TEOREMA

Un polinomio $f(x)$ de grado $n>0$ tiene a lo sumo n raíces reales (no necesariamente diferentes).

Ejemplos

1. El polinomio de cuarto grado

$$f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

tiene 4 raíces reales distintas, cada una de multiplicidad 1.

2. El polinomio de cuarto grado

$$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1=(x-1)^4$$

tiene una sola raíz de multiplicidad 4.

3. El polinomio de cuarto grado

$$f(x)=x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

tiene dos raíces diferentes de multiplicidad 1.

Sea $f(x)$ un polinomio en potencias descendentes que tiene coeficientes reales. A partir de esta forma es posible determinar el número máximo de raíces positivas y el número máximo de raíces negativas, examinando las variaciones de signo de $f(x)$. Una variación de signo se da cuando dos términos consecutivos tienen signos opuestos. Así:

Regla de los signos de Descartes

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales que se organiza en potencias descendentes de x.

1. El número de raíces positivas de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$, o es este número disminuido en un entero par.
2. El número de raíces negativas de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$, o es este número disminuido en un entero par.

Ejemplo

El polinomio

$$f(x) = \underbrace{x^3 -}_{\substack{Cambio \\ de\ signo}} 3x - 1$$

tiene una variación de signo. Según la regla de Descartes $f(x)$ tiene **una** o **ninguna** raíz positiva, pues, el número 1 reducido por un entero par es negativo. La inspección de

$$f(-x) = \underbrace{-x^3}_{\substack{Cambio \\ de\,\text{signo}}} \quad \underbrace{+3x-1}_{\substack{Cambio \\ de\,\text{signo}}}$$

tiene dos variaciones de signo. Según la regla de Descartes $f(x)$, tiene **dos** o **ninguna** raíz negativa, pues, el número 2 reducido por un entero par es 0.

RAICES NEGATIVAS

TEOREMA

Sea p/s un número racional con p y s primos entre sí y una raíz del polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes de $a_i, = 0,1,\cdots,n$, son enteros con $a_n \neq 0$. Entonces, p es un factor de a_0 y s es un factor de a_n.

Ejemplo

Hallar todas las raíces racionales de $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

Solución:

$a_0 = -2$ y $a_n = 3$, y sus factores son:

$p : \pm 1, \pm 2$

$s : \pm 1, \pm 3$

Según el teorema anterior, las raíces racionales posibles de $f(x)$ son

$\frac{p}{s} : -1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -2, 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

Factorizando se tiene que

$f(x) = (x+1)(3x-1)\left(x^2 - 4x + 2\right)$, y sus raíces son $-1, \frac{1}{3}, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$. Es decir

$f(x)$ tiene dos raíces racionales y dos raíces irracionales.

RAICES COMPLEJAS DE LOS POLINOMIOS

TEOREMA

Sea $f(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes reales. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z}$ es también una raíz de $f(x)$.

Ejemplo

Dado que $1+2i$ es una raíz del polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$, por el teorema anterior se deduce que $1-2i$ es también una raíz.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

TEOREMA

Un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces, donde una raíz de multiplicidad k se cuenta k veces.

Ejemplo

Hallar todas las raíces del polinomio $f(x)=2x^5+x^4+10x^3+5x^2+8x+4$

Solución:

Factorizando se tiene que

$f(x)=(2x+1)(x^2+1)(x^2+4)$. Por lo tanto sus raíces son $-\frac{1}{2}, -i, i, -2i$, y $2i$.

TEOREMA

Sean $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (no necesariamente diferentes) las n raíces de la función polinomial de grado n

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0,\ n>0$$

Entonces $f(x)$ puede escribirse como el producto de factores lineales:

$$f(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$$

Ejemplo

Si $-4, 1+2i, 1-2i$ son raíces del polinomio $f(x)=x^3+2x^2-3x+20$, entonces $f(x)=(x+4)(x-1-2i)(x-1+2i)$.

COTAS DE LAS RAICES

Son los valores entre los que deben estar comprendidas las raíces reales de un polinomio y son de dos tipos.

Cota superior. Se obtiene cuando los residuos de la división sintética tienen el mismo signo.

Cota inferior. Se obtiene cuando los residuos de la división sintética son alternadamente positivos y negativos.

Las cotas para las raíces reales no son únicas; cualquier número que sea menor o igual a la raíz menor es una cota inferior para las raíces, y cualquier número que sea mayor o igual a la raíz mayor es una cota superior.

Ejemplo

Hallar las cotas superiores e inferiores para las raíces reales de $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 6x + 12$

Solución:

	2	-5	3	-12	6	12
4		8	12	60	192	792
	2	3	15	48	198	804

	2	-5	3	-12	6	12
3		6	3	18	18	72
	2	1	6	6	24	84

3 es cota superior.

	2	-5	3	-12	6	12
-2		-4	18	-42	108	-228
	2	-9	21	-54	114	-216

	2	-5	3	-12	6	12
-1		-2	7	-10	22	-28
	2	-7	10	-22	28	-16

-1 es cota inferior.

Por lo tanto las raíces del polinomio deben estar en el intervalo $[-1,3]$.

GRAFICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES

La gráfica de una función lineal, o de una función polinomial de primer grado es siempre una recta. La gráfica de una función cuadrática, o de una función polinomial de grado 2, es siempre una parábola. Estos enunciados no pueden hacerse con respecto a una función polinomial de grado mayor.

La gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener una o varias formas posibles. Graficar funciones polinomiales de grado $n \geq 3$ requiere, a menudo, técnicas avanzadas de cálculo. En consecuencia, en este apartado, este análisis se limitará a graficar funciones de grados 3,4, y 5.

En los siguientes ejemplos se consideran sólo gráficas de polinomios que se pueden factorizar. En la mayoría de los casos, se puede obtener una gráfica precisa utilizando el siguiente procedimiento.

Sugerencias para graficar una función polinómica $y = f(x)$

1. Calcular $f(-x)$ para determinar si la gráfica tiene alguna simetría
2. Calcular el intersecto $f(0)$ en y.
3. Factorizar el polinomio.
4. Determinar los intersectos en x (las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$).
5. Trazar una recta numérica. Determinar los signos algebraicos de todos los factores entre los intersectos en x. Esto indica donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.
6. Graficar la función utilizando los pasos 1-5. Marcar puntos donde sea necesario.

Ejemplo

Graficar $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Solución:

1. $f(-x) = -x^3 - x^2 + 2x$

   Por lo tanto la función no es par, ni impar.

2. $f(0) = 0$. La gráfica pasa por el origen.
3. $f(x) = x(x+1)(x-2)$
4. Según el paso anterior $f(x) = 0$, si

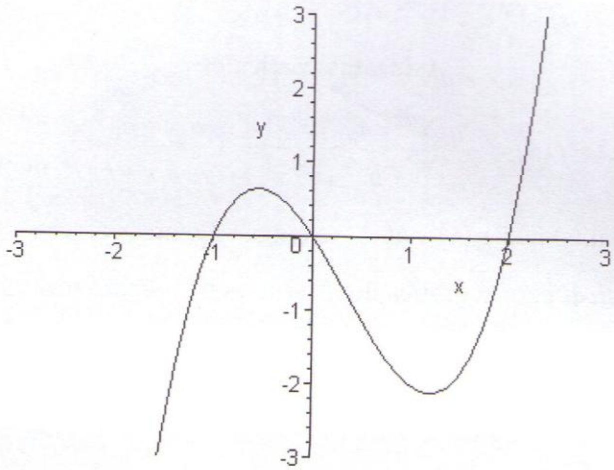
   $x = 0, x = -1, x = 2$.

5. El cuadro de signos se muestra a continuación

-1 0 2

x	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

6. Usando los resultados obtenidos en los pasos 1-5 y sin localizar con precisión los **puntos críticos**, de la gráfica, esto es, los puntos donde la función polinomial cambia de creciente a decreciente, se ha elaborado la gráfica que consta a continuación.



FUNCIONES RACIONALES

DEFINICION

Una función f se llama ***función racional*** si

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x + b_o}$$

El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Para graficar una función racional se determina cualquier simetría y los intersectos. El intersecto en y es $f(0)$, siempre y cuando el número 0 esté en el dominio de f.

DEFINICION

La recta $y=mx+b$ es una ***asíntota*** del gráfico correspondiente a una función f cualquiera si cuando mayor es el valor de x la distancia, entre la recta y la curva, tiende a cero (o disminuye), esto es $\lim\limits_{x\to\infty}\left|f(x)-(mx+b)\right|=0$.

Asíntotas verticales

$$\text{Sea} \quad f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Una función racional tal que $g(x)$ y $h(x)$ no tengan factores comunes. La recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** para la gráfica de f si a es un número real tal que $h(a) = 0$

Asíntotas horizontales

$$\text{Sea} \quad f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Una función racional:

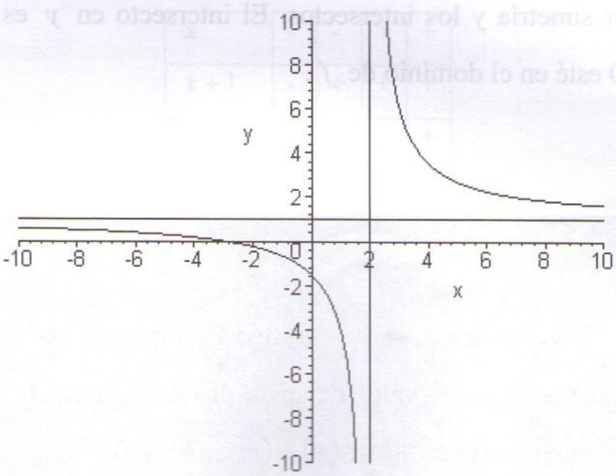
1. Si $n < m$, entonces la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.
2. Si $n = m$, entonces la recta $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ es una asíntota horizontal.
3. Si $n > m$, entonces la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo

Graficar $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

Solución:

$x = 2$ es asíntota vertical y $y = 1$ es asíntota horizontal



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el valor de k para que $f(x)$ se a divisible por $g(x)$.

$f(x) = kx^5 - 3x^2 + 2x + k; g(x) = x - 1$

$k(1)^5 - 3(1)^2 + 2(1) + k = 0$

$k - 3 + 2 + k = 0$

$2k = 1$

$k = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(1) - 3(1) + 2(1) + \frac{1}{2}$

$f(x) = 0$

2. Hallar un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 1,2 y -2.

$P(x) = (x-1)(x-2)(x+2$

$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

3. Demostrar que $(x+1)$ es un factor de $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$.

$(x+1)$

$f(x) = 4(-1)^3 + 4(-1)^2 + 1 - 1$

$F(x) = 0$

4. Demostrar que $(x-2)$ es un factor de $f(x)=9x^3-18x^2-x+2$.

$f(x) = 9(2)^3 - 18(2)^2 - 2 + 2$

$f(x) = \cancel{72} - \cancel{72}$

$f(x) = 0$

5. Hallar k para que $(x+3)$ sea un factor de $f(x)=2x^3+2kx^2-3x+5$.

$f(x) = 2(-3)^3 + 2K(-3)^2 - 3(-3) + 5$

6. Hallar el valor de k para que el residuo de dividir $f(x)=2x^3+2kx^2-3x+5$ por $(x+3)$ sea 10.

7. Si se conoce que al dividir $f(x) = x^2 - 5x + 5$ por $(x - c)$ se obtiene un residuo de -1, cuáles son los posibles valores de c.

8. Hallar las raíces reales de $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$.

9. Hallar las raíces reales de $f(x) = 16x^4 + 16x^3 - 77x^2 - 80x - 15$.

10. Resolver $2x^3 - 9x^2 + 17x - 24 = 0$.

11. Resolver $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

12. Hallar todas las raíces de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

13. Hallar todas las raíces de $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + x + 2$.

14. Hallar todas las raíces de $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

15. Hallar todas las raíces de $f(x) = 2x^4 - 32$

16. Hallar todas las raíces de $f(x) = x^6 - 64$.

17. Graficar $f(x) = x^3 - 4x$.

18. Graficar $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

19. Graficar $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$.

20. Graficar $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$.

21. Graficar $f(x) = \dfrac{5}{x+1}$.

22. Graficar $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$.

23. Graficar $f(x) = \dfrac{3x-2}{5x+1}$.

24. Graficar $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$.

Capítulo 7

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

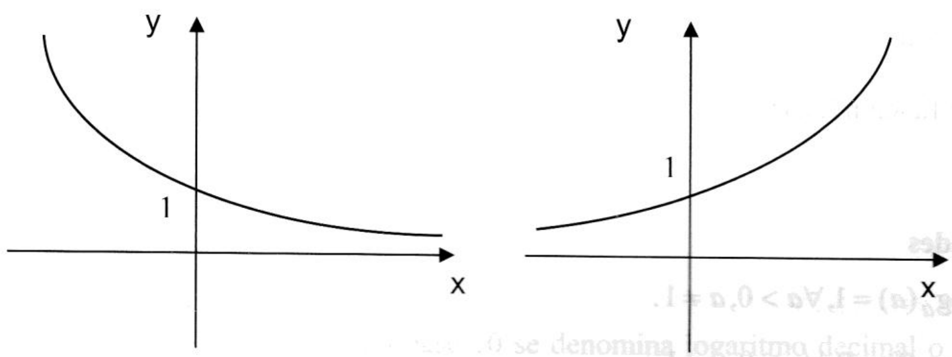
FUNCION EXPONENCIAL

DEFINICION

La ***función exponencial*** se define por:

$$\begin{array}{l} f: R \to R^{+} \\ x \mapsto y = a^{x} \end{array}, \quad \text{donde } a > 0, a \neq 1$$

El número a se denomina base de la función exponencial. Si $y = e^{x}$, donde $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281\ldots$, entonces f se denomina función exponencial con base natural. El manejo de este tema requiere un conocimiento cabal de las leyes de los exponentes. Sus gráficas posibles constan a continuación.



$0 < a < 1$ $\qquad\qquad$ $a > 1$

Observaciones

1. La función exponencial es creciente si $a > 1, \forall x \in R$.
2. La función exponencial es decreciente si $0 < a < 1, \forall x \in R$.
3. La función exponencial es biyectiva y, por lo tanto, es invertible. La inversa de la función exponencial es la función logarítmica.

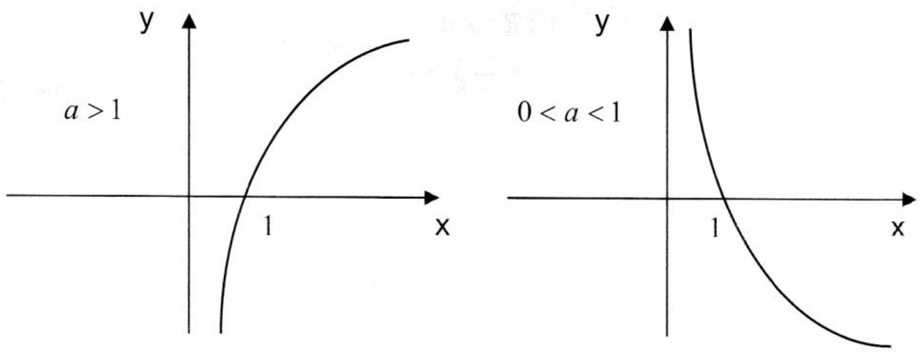
FUNCION LOGARITMICA

DEFINICION

La ***función logarítmica*** se define por:

$$\begin{aligned} f &: R^+ \to R \\ x &\mapsto y = \log_a(x) \end{aligned}, \text{ donde } a \in R^+, a \neq 1$$

Gráfico de $y = \log_a(x)$



Observaciones

1. La función logarítmica es creciente si $a > 1, \forall x \in R^+$.

2. La función logarítmica es decreciente si $0 < a < 1, \forall x \in R^+$.

Propiedades

1. $\log_a(a) = 1, \forall a > 0, a \neq 1$.

2. $\log_a(1) = 0, \forall a > 0, a \neq 1$

3. $\log_a(x) = 0 \leftrightarrow x = 1, \forall a > 0, a \neq 1$

4. $\log_a(x) < 0,\ 0 < x < 1,\ \text{si } a > 1$.

5. $\log_a(x) > 0,\ 0 < x < 1,\ \text{si } 0 < a < 1$.

6. $\log_a(x) > 0,\ x > 1,\ a > 1$.

7. $\log_a(x) < 0,\ x > 1,\ 0 < a < 1$.

TEOREMA

$\forall x, y \in R^+, a \in R^+ - \{1\}$, se cumple que:

1. $\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a\left(x^b\right) = b.\log_a(x)$, donde $b \in R$.

TEOREMA **Cambio de base**

$\forall x \in R^+, \forall a, b \in R^+ - \{1\}$, se cumple que:

$$\log_b(x) = \log_a(x).\log_b(a)$$

Ejemplo

Hallar el valor de $\log_2 50$

Solución:

Usando el teorema de cambio de base:

$$\log_2 50 = \frac{\log 50}{\log 2}, \text{ o también } \log_2 50 = \frac{\ln 50}{\ln 2}$$

Observaciones

1. La función logarítmica con base 10 se denomina logaritmo decimal o vulgar y se nota por $y = \log(x)$.
2. La función logarítmica con base e se denomina logaritmo natural y se nota por $y = \ln(x)$.
3. Las funciones logaritmo decimal y exponencial base 10 son funciones inversas mutuamente.
4. Las funciones logaritmo natural y exponencial base e son funciones inversas mutuamente.

TEOREMA

$\forall x \in R^{+}, \forall a \in R^{+} - \{1\}, \forall r \in R - \{0\}$, se cumple que: $\log_{a^r}(x) = \frac{1}{r}.\log_a(x)$

Ejemplos

$\log_4(2) = \log_{2^2}(2) = \frac{1}{2}\log_2(2) = \frac{1}{2}$

$\log_{\sqrt{2}}(x) = \log_{2^{\frac{1}{2}}}(x) = 2.\log_2(x)$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Son igualdades que son verdaderas para determinados valores de la incógnita. Para resolver una ecuación logarítmica se debe establecer un dominio como R^{+}.

Ejemplo

Resolver

$125^{2-3x} = \sqrt{\frac{1}{25}}$

Solución:

Obteniendo la ecuación equivalente

$5^{3(2-3x)} = 5^{-1}$

Igualando exponentes

$3(2-3x) = -1$

Se tiene que

$x = \frac{7}{9}$ $Sol: \left\{\frac{7}{9}\right\}$

Ejemplo

Resolver

$\log_2(x-2) + \log_2(x) = 3$

Solución:

$D_R : x-2>0 \wedge x>0$

$x>2 \wedge x>0$

$x>2$

Usando las leyes de los logaritmos

$\log_2 (x-2)x = 3$

Aplicando el operador exponencial de base 2

$x(x-2)=2^3 \rightarrow x^2-2x-8=0 \rightarrow (x-4)(x+2)=0$

$(x=4 \vee x=-2) \wedge x>0 \rightarrow x=4$ $\qquad Sol:\{4\}$

INECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Son desigualdades que son verdaderas para determinados valores de la incógnita. Para resolver una inecuación logarítmica se debe establecer un dominio como R^+.

Ejemplo

Resolver

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-2)$$

Solución:

$D_R : x>1 \wedge x>\frac{1}{2} \wedge x>-1$

$x>1$

Usando las leyes de los logaritmos

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)<\log_{\frac{1}{2}}(2x+2)$$

Aplicando el operador inverso

$$\frac{x-1}{2x-1}>2x+2 \rightarrow \frac{4x^2+x-1}{2x-1}<0$$

$$\left(x<\frac{-1-\sqrt{17}}{8} \vee \frac{-1+\sqrt{17}}{8}<x<\frac{1}{2}\right) \wedge (x>1) \rightarrow \varnothing \qquad Sol: \forall x \in \varnothing$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resolver

$$9\left(\frac{1}{3}\right)^{(2-3x)} = 24 + 3^{(4-3x)}$$

2. Resolver

$$18^x + 8^x \geq 2(27)^x$$

3. Resolver

$$\log_2\left(x^3\right)+\log_8(x)\leq\frac{\log_3 81}{\log_2 8}$$

4. Resolver

$$\frac{1}{4}\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)\right]^2+\log_{\frac{1}{3}}(x)-2\geq 0$$

5. Resolver

$$\log_a\left(2^{-2x}-4\right)\geq \log_a\left(2^{-2x}+2\right),\ \text{si } 0<a<1$$

6. Resolver

$$\frac{\log^2_{\frac{1}{2}}(x)-\log_{\frac{1}{2}}(x)-2}{\log_{\frac{1}{2}}(x)-3}\geq 0$$

7. Resolver

$$\frac{\log_2(x)+\log_2(x+1)}{\log_2(3)-1} \leq \log_{\frac{3}{2}}(2)$$

8. Resolver

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}-1\right)+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x}>1$$

9. Resolver

$$\log_2(x) \leq \frac{3}{4 + \log_{\frac{1}{2}}(x)}$$

10. Resolver

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+2) \geq \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(3)$$

11. Resolver

$$\left(\log_x 2\right)\left(\log_{2x} 2\right)\left(\log_2 4x\right) \geq 1$$

12. Resolver

$$\log_3(3x) \,.\, \log_x(3x) \geq \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$$

17. Determinar la monotonía de f

$$f : \left]-\infty, 0\right] \to R$$
$$x \mapsto y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$$

18. Determinar la monotonía de f

$$f : \left]-3, 2\right[\to R$$
$$x \mapsto y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$$

19. Determinar el dominio y la monotonía de f

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 5x + 6\right) - \ln\left(x + 2\right)$$

20. Determinar el dominio de f

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\log_2^2(x) - \log_2(x)}{\left[\log_2(x) - 1\right]^2}}$$

21. Sea la función

$$f(x)=\frac{3^x+1}{3^x-1}$$

a) Demostrar que es inyectiva.

b) Redefinir para que sea biyectiva y hallar su inversa.

22. Sea la función

$$f:R\to\left]-1,1\right[$$
$$x\mapsto y=\frac{2-e^x}{2+e^x}$$

a) Demostrar que es biyectiva.

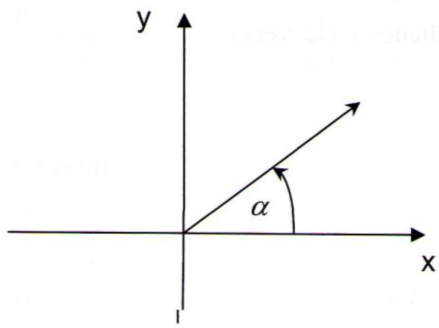
b) Hallar su inversa.

Capítulo 8

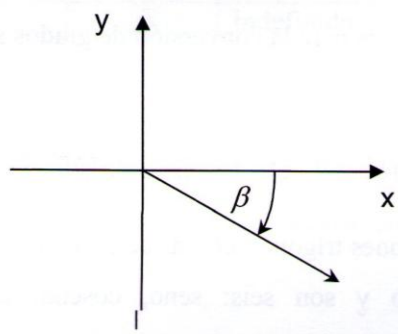
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

INTRODUCCION

El concepto de ángulo es central en trigonometría. Un ángulo tiene tres partes: un **lado inicial** x, un **lado terminal**, y un **vértice** (punto de intersección de dos lados). Se dice que un ángulo está en posición canónica si su lado inicial es la parte positiva de eje x y su vértice es el origen de coordenadas. El sentido de la rotación se toma como positivo en el sentido antihorario y como negativo en sentido horario. La medida de un ángulo puede expresarse en grados o en radianes.



Angulo positivo



Angulo negativo

GRADOS

DEFINICION

Un ángulo de un ***grado***, es la medida de un ángulo formado por $\dfrac{1}{360}$ de una revolución completa en sentido antihorario en un sistema de coordenadas rectangulares.

Notación

Los grados sexagesimales se representan mediante el símbolo ^{o} .Así: $30^o, 45^o, 90^o$, etc.

RADIANES

DEFINICION

Un ángulo tiene la medida de un ***radián*** si al colocar su vértice en el centro de un círculo de radio r, la longitud del arco interceptado en la circunferencia es igual a r.

Notación

Los radianes se representan mediante el símbolo rad.

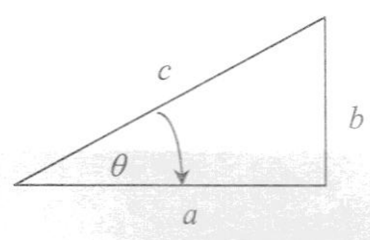
Ejemplos

$\frac{\pi}{3}rad$, $\frac{\pi}{4}rad$, $\frac{\pi}{2}rad$, etc.

El número de veces que la longitud r puede colocarse en la circunferencia es 2π, es decir, $2\pi = 360^o$ o también $\pi = 180^0$, expresiones que pueden considerarse como equivalencias para la conversión de grados a radianes y viceversa.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas se definen como cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo y son seis: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante (abreviadas como: sen, cos, tan, etc.), de la siguiente manera:



$$sen\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

De la definición se tiene que:

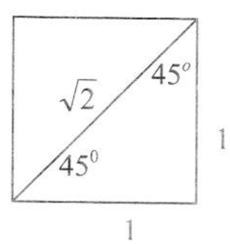
$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

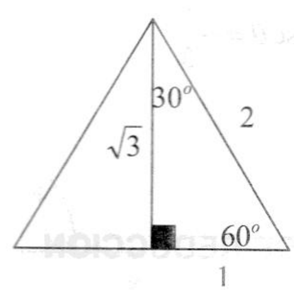
En la siguiente tabla se presenta las medidas en grados y en radianes de varios ángulos frecuentes, junto con los valores de seno, coseno y tangente.

ANGULOS COMUNES DEL PRIMERO Y SEGUNDO CUADRANTES

Grados	0	30	45	60	90	180
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sen\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Indefinido	0

Observación. Los valores del cuadro anterior han sido encontrados por construcción del círculo trigonométrico (radio 1) y de las figuras que constan a continuación.





SIGNOS EN LOS CUATRO CUADRANTES

1. En el primer cuadrante todas las funciones son positivas.
2. En el segundo cuadrante son positivas el seno y su recíproca la cosecante.
3. En el tercer cuadrante son positivas la tangente y su recíproca la cotangente.
4. En el cuarto cuadrante son positivas el coseno y su recíproca la secante.

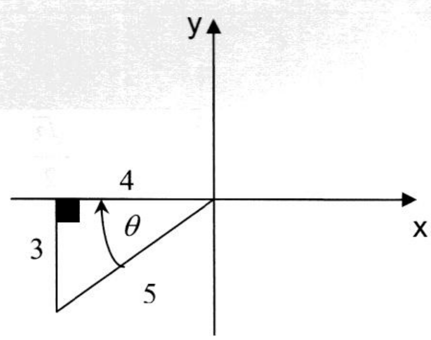
Ejemplo

Si $sen\theta = -\frac{3}{5}$ y $\theta \in III_C$,

Hallar el valor de las demás funciones trigonométricas.

Solución:

Se construye el siguiente gráfico usando los datos del problema



Los valores pedidos son:

$$sen\theta = -\frac{3}{5} \qquad \cos\theta = -\frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{3}{4}$$

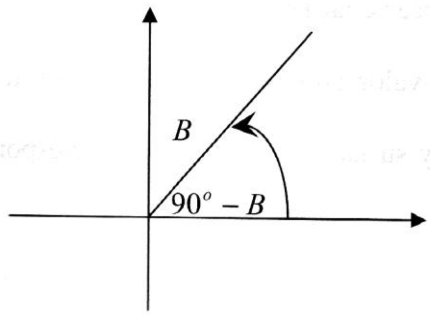
$$\csc\theta = -\frac{5}{3} \qquad \sec\theta = -\frac{5}{4} \qquad \cot\theta = \frac{4}{3}$$

FORMULAS DE REDUCCION

Las siguientes fórmulas permiten reducir funciones trigonométricas de ángulos no comunes ($120^o, 225^o, 330^o$, etc.) a funciones de ángulos de tabla.

1. **Ángulos complementarios**

   Las funciones trigonométricas de ángulos complementarios tienen el mismo valor de las cofunciones del ángulo agudo comprendido entre su lado terminal y el eje y.



Ejemplos

$sen(90^o - B) = \cos B$

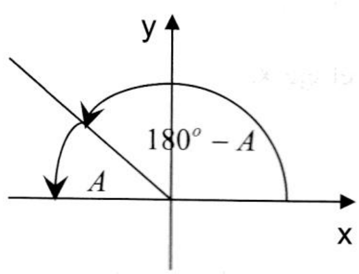
$\cos(90^o - B) = senB$

$\tan(90^o - B) = \cot B$

Las siguientes fórmulas están relacionadas con el eje x.

2. Ángulos del segundo cuadrante

Son iguales en valor absoluto a las funciones del ángulo agudo comprendido entre su lado final y el eje x. El signo corresponde al de un ángulo del segundo cuadrante.



Ejemplos

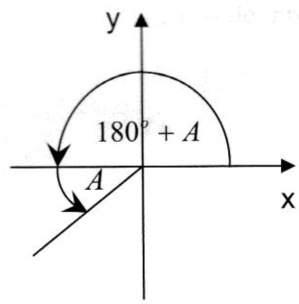
$sen(180^o - A) = senA$

$\cos(180^o - A) = -\cos A$

$\tan(180^o - A) = -\tan A$

3. Ángulos del tercer cuadrante

Son iguales en valor absoluto a las funciones del ángulo agudo comprendido entre el eje x y su lado final. El signo corresponde al de un ángulo del tercer cuadrante.



Ejemplos

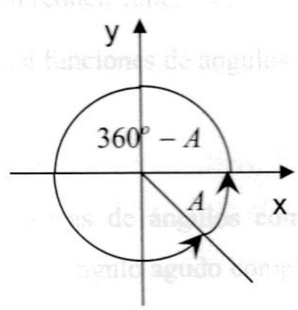
$sen(180^o + A) = -senA$

$\cos(180^o + A) = -\cos A$

$\tan(180^o + A) = \tan A$

4. Ángulos del cuarto cuadrante

Son iguales en valor absoluto a las funciones del ángulo agudo comprendido entre su lado final y el eje x. El signo corresponde al de un ángulo del cuarto cuadrante.



Ejemplos

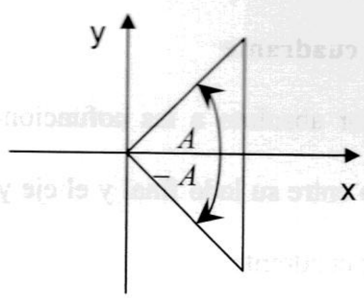
$sen(360^o - A) = -senA$

$\cos(360^o - A) = \cos A$

$\tan(360^o - A) = -\tan A$

5. Ángulos negativos

Las funciones de $-A$ son iguales en nombre a las funciones del ángulo A. Los signos cambian para todas excepto para el coseno y para su recíproca la secante.



Ejemplos

$sen(-A) = -senA$

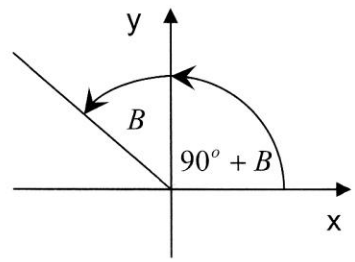
$\cos(-A) = \cos A$

$\tan(-A) = -\tan A$

Las siguientes fórmulas están relacionadas con el eje y.

6. Ángulos del segundo cuadrante

Son iguales en valor absoluto a las cofunciones de igual nombre del ángulo agudo comprendido entre el eje y y su lado final. Los signos corresponden al de un ángulo del segundo cuadrante.



Ejemplos

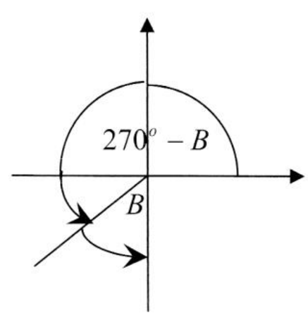
$sen(90^o + B) = \cos B$

$\cos(90^o + B) = -senB$

$\tan(90^O + B) = -\cot B$

7. Ángulos del tercer cuadrante

Son iguales en valor absoluto a las cofunciones de igual nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado final y el eje y. Los signos corresponden al de un ángulo del tercer cuadrante.



Ejemplos

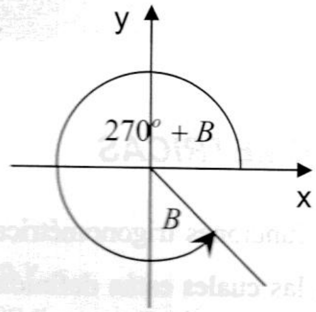
$sen(270^o - B) = -\cos B$

$\cos(270^o - B) = -senB$

$\tan(270^O - B) = \cot B$

8. Ángulos del cuarto cuadrante

Son iguales en valor absoluto a las cofunciones de igual nombre del ángulo agudo comprendido entre el eje y y su lado final. Los signos corresponden al de un ángulo del cuarto cuadrante.



Ejemplos

$sen(270^o + B) = -\cos B$

$\cos(270^o + B) = senB$

$\tan(270^O + B) = -\cot B$

El siguiente es un ejemplo de aplicación de las fórmulas antes anotadas.

Ejemplo

Hallar el valor exacto de la siguiente expresión

$E = sen(420^o).\cos(390^o) + \cos(-300^o).sen(-330^o)$

Solución:

$E = sen(360^o + 60^o).\cos(360^o + 30^o) + \cos(-300^o).sen(-330^o)$

$E = sen(360^o + 60^o).\cos(360^o + 30^o) - \cos(300^o).sen(330^o)$

$E = sen(360^o + 60^o).\cos(360^o + 30^o) - \cos(270^o + 30^0).sen(360^o - 30^o)$

$E = sen(60^o).\cos(30^o) + sen(30^0).sen(30^o)$

$E = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1$

DEFINICION

Las funciones seno y coseno son dos funciones definidas como:

$$sen: R \to [-1,1] \qquad \cos: R \to [-1,1]$$
$$x \mapsto y = senx \qquad x \mapsto y = \cos x$$
, que satisfacen:

$$\forall x, y \in R : \cos(x-y) = \cos x.\cos y + senx.seny$$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Son igualdades que contienen funciones trigonométricas y son verdaderas para todos los valores de los ángulos para las cuales están definidas las funciones. Las siguientes identidades provienen de la definición anterior.

1. $sen^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\cos(-y) = \cos y$
3. $\cos(x-\pi) = -\cos x$
4. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = senx$
5. $sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
6. $sen(x-y) = senx.\cos y - seny.\cos x$
7. $sen(-y) = -seny$
8. $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - senx.seny$
9. $sen(x+y) = senx.\cos y + seny.\cos x$
10. $sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
11. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -senx$
12. $senx + seny = 2sen\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
13. $senx - seny = 2sen\left(\frac{x-y}{2}\right).\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

14. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

15. $\cos x - \cos y = -2sen\left(\dfrac{x+y}{2}\right).sen\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

16. $sen(2x) = 2senx.\cos x$

17. $\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x$

18. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

19. $sen^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

20. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}$

21. $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

22. $senx = \dfrac{2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

23. $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

REGLAS DE DEMOSTRACION

1. Se reduce un miembro a la forma del otro, usando identidades conocidas. En general el miembro más complicado es reducido a la forma del miembro más sencillo.
2. Se pueden reducir ambos miembros, usando identidades conocidas, a la misma expresión. Entonces como los dos miembros son idénticos a una tercera expresión, son idénticos entre sí.
3. En identidades que contienen funciones de ángulos múltiples, fraccionarios o de sumas y diferencias de ángulos, se sugiere expresar dichas funciones como funciones de ángulos sencillos.
4. Usualmente es ventajoso cambiar a todas las funciones a senos y cosenos.

Ejemplo

Demostrar que

$\cos^4 x - sen^4 x + 1 = 2\cos^2 x$

Solución:

$$(\cos^4 x - sen^4 x) + 1 = 2\cos^2 x$$

$$(\cos^2 x - sen^2 x).\underbrace{(\cos^2 x + sen^2 x)}_{1} + 1 = 2\cos^2 x$$

$$\cos^2 x - sen^2 x + 1 = 2\cos^2 x$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 1 = 2\cos^2 x$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 1 = 2\cos^2 x$$

$$2\cos^2 x = 2\cos^2 x \qquad //$$

FUNCIONES PERIODICAS

DEFINICION

Sea $f : A \rightarrow B$ una función real, f es periódica si y sólo si:

$$\exists x \in R - \{0\},\ \forall x \in D_f, x + T \in D_f \ \mid \ f(x+T) = f(x)$$

T se denomina **período de repetición de la función f .**

Observaciones.

1, Generalizando, si f es periódica de período T cumple que: $f(x+kT) = f(x)$, $\forall k \in Z$.

2. Para estudiar una función trigonométrica f, se debe determinar su dominio y su periodicidad.

3. Si f es periódica de período T, su estudio puede hacerse únicamente en el intervalo $[0, T]$.

4. Si f es periódica de período T, y es par o impar, su estudio puede hacerse únicamente en el intervalo $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.

Ejemplo

Demostrar que el período de la función seno es 2π.

Solución:

P.D. $sen(x+2\pi) = senx$

$$\begin{aligned} sen(x+2\pi) &= sen(x+2\pi) \\ &= senx.\cos 2\pi + \cos x.sen2\pi \\ &= senx \quad // \end{aligned}$$

Generalizando: $sen(x+2k\pi) = senx, \forall k \in Z$

Ejemplo

Demostrar que el período de la función coseno es 2π.

Solución:

P.D. $\cos(x+2\pi) = \cos x$

$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos(x+2\pi) \\ &= \cos x.\cos 2\pi - senx.sen2\pi \\ &= \cos x \quad // \end{aligned}$$

Generalizando: $\cos(x+2k\pi) = \cos x, \forall k \in Z$

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

FUNCIONES SENO Y COSENO

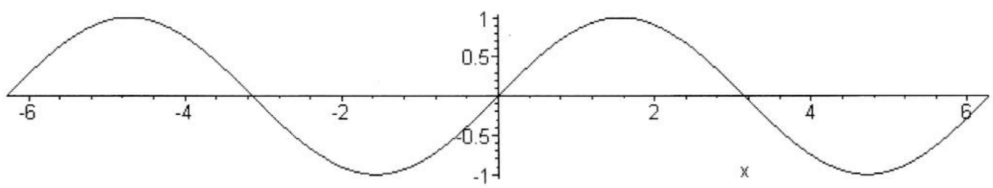
DEFINICION

Se llaman funciones seno y coseno a las funciones definidas por:

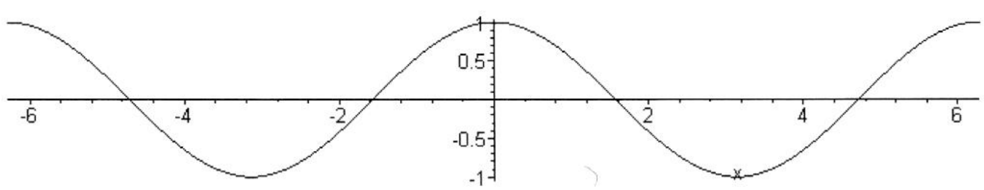
$$sen: R \to [-1,1] \qquad \cos: R \to [-1,1]$$
$$x \mapsto y = senx \qquad x \mapsto y = \cos x$$

Para elaborar las gráficas de estas funciones se han calculado los valores de $y = \cos x$ en $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \cdots$ etc. Como las funciones seno y coseno son periódicas, y además, son impar y par respectivamente, basta construir sus gráficas en el intervalo $[0, \pi]$.

Representación gráfica de $y = senx$



Representación gráfica de $y = \cos x$



Propiedades

1. La función seno es periódica de período 2π.
2. La función coseno es periódica de período 2π.
3. La función seno es impar.
4. La función coseno es par.
5. Las raíces de la función seno son $k\pi, \forall k \in Z$.
6. Las raíces de la función coseno son $\frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in Z$.
7. La función seno es creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$.

8. La función seno es decreciente en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$.

9. La función coseno es decreciente en el intervalo $[2k\pi, \pi+2k\pi[$.

10. La función coseno es creciente en el intervalo $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$.

FUNCIONES TANGENTE Y COTANGENTE

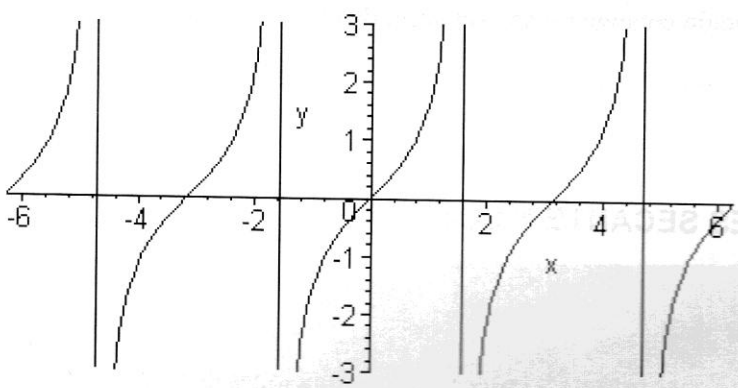
DEFINICION

Se llaman funciones tangente y cotangente a las funciones definidas por:

1. $$\begin{aligned} &\tan : A \to R \\ &x \mapsto y = \tan x = \frac{senx}{\cos x}, \quad \text{donde } \cos x \neq 0 \wedge A = R - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}; k \in Z \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &\cot : A \to R \\ &x \mapsto y = \cot x = \frac{\cos x}{senx}, \quad \text{donde } senx \neq 0 \wedge A = R - \{k\pi\}; k \in Z \end{aligned}$$

Representación gráfica de $y = \tan x$

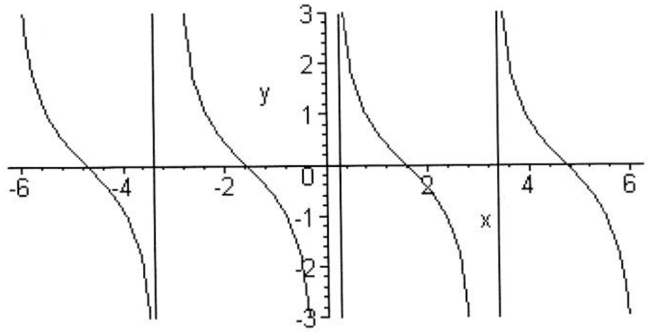


Propiedades

1. La función tangente es periódica de período π.
2. La función tangente es impar.
3. Las raíces de la tangente son $k\pi, \forall k \in Z$.
4. La función tangente no está definida en los puntos $\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \forall k \in Z$.

5. La función tangente es creciente en el intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[,\forall k\in Z$.

Representación gráfica de $y=\cot x$



Propiedades

1. La función cotangente es periódica de período π.
2. La función cotangente es impar.
3. Las raíces de la cotangente son $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\forall k\in Z$.
4. La función cotangente no está definida en los puntos $k\pi,\forall k\in Z$.
5. La función cotangente es decreciente en el intervalo $]k\pi,\pi+k\pi[,\forall k\in Z$.

FUNCIONES SECANTE Y COSECANTE

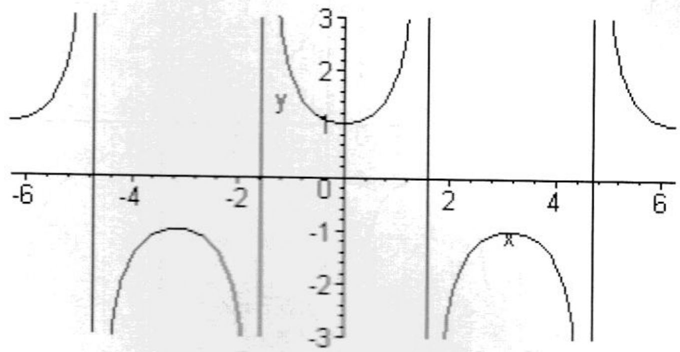
DEFINICION

Se llaman funciones secante y cosecante a las funciones definidas por:

1. $$\begin{aligned}&\sec: A\to R\\ &x\mapsto y=\sec x=\frac{1}{\cos x}\end{aligned},\ \text{donde } \cos x\neq 0\wedge A=R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\};k\in Z$$

2. $$\begin{aligned}&\csc: A\to R\\ &x\mapsto y=\csc x=\frac{1}{senx}\end{aligned},\ \text{donde } senx\neq 0\wedge A=R-\{k\pi\};k\in Z$$

Representación gráfica de $y = \sec x$



Propiedades

1. La función secante es periódica de período 2π.
2. La función secante es par.
3. La función secante es creciente en los intervalos

   $\left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$,

   $\left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right], \forall k \in Z$.

4. La función secante es decreciente en los intervalos

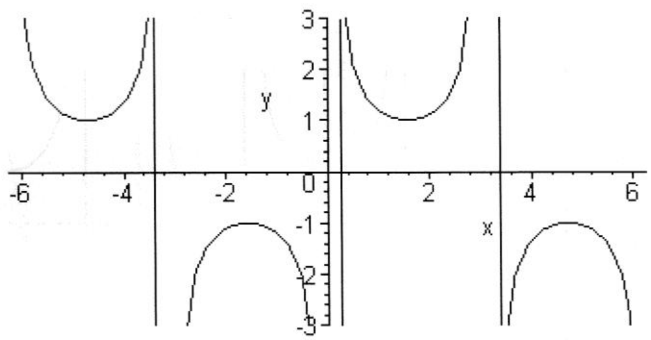
   $\left[\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$,

   $\left]\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right], \forall k \in Z$.

5. La función secante no tiene raíces reales.
6. La función secante no está definida en los puntos $\frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in Z$.
7. El recorrido de la función secante es $R - \left]-1,1\right[$.
8. La función secante toma el valor de 1 en $x = 2k\pi$, y toma el valor de -1 en

   $x = \pi + 2k\pi$.

Representación gráfica de $y = \csc x$



Propiedades

1. La función cosecante es periódica de período 2π.
2. La función secante es impar.
3. La función cosecante es creciente en los intervalos

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right[,$$

$$\left]\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2}\pi + 2k\pi\right], \forall k \in Z.$$

4. La función cosecante es decreciente en los intervalos

$$\left]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right],$$

$$\left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right[, \forall k \in Z.$$

5. La función cosecante no tiene raíces reales.
6. La función cosecante no está definida en los puntos $k\pi, \forall k \in Z$.
7. El recorrido de la función cosecante es $R - \left]-1,1\right[$.
8. La función cosecante toma el valor de 1 en $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ y toma el valor de -1 en $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

FUNCIONES SENO Y COSENO INVERSOS

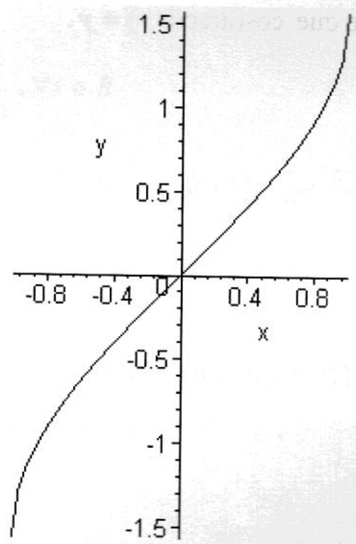
DEFINICION

Las funciones $\begin{array}{l} sen:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1] \\ x\mapsto y=senx \end{array}$, y $\begin{array}{l} \cos:[0,\pi]\to[-1,1] \\ x\mapsto y=\cos x \end{array}$

son funciones biyectivas y sus funciones inversas se denominan función arco seno y arco coseno, respectivamente, así:

$$\begin{array}{l} arcsen:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ y\mapsto x=arcseny \end{array} \quad , \text{y} \quad \begin{array}{l} \text{arccos}:[-1,1]\to[0,\pi] \\ y\mapsto x=\text{arccos}\, y \end{array}$$

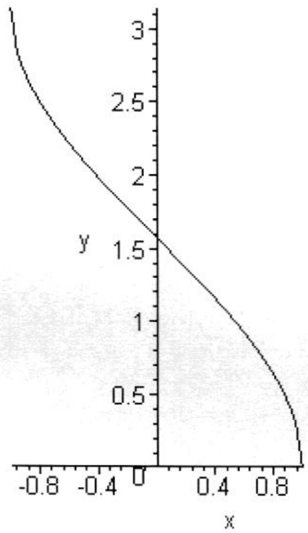
Representación gráfica de $y = arcsenx$



Observaciones

1. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se cumple que $arcsen(senx) = x$.
2. $\forall y \in [-1,1]$ se cumple que $sen(arcseny) = y$.

Representación gráfica de $y = \arccos x$



Observaciones

1. $\forall x \in [0, \pi]$ se cumple que $\arccos(\cos x) = x$.

2. $\forall y \in [-1,1]$ se cumple que $\cos(\arccos y) = y$.

Propiedades

1. $sen(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1,1]$.

2. $\cos(arcsenx) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1,1]$

FUNCIONES TANGENTE Y COTANGENTE INVERSAS

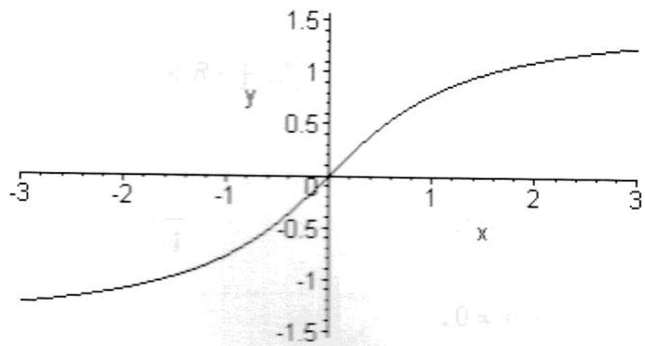
DEFINICION

Las funciones $\begin{array}{l} \tan : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to R \\ x \mapsto y = \tan x \end{array}$, y $\begin{array}{l} \cot :]0, \pi[\to R \\ x \mapsto y = \cot x \end{array}$

son funciones biyectivas y sus funciones inversas se denominan función arco tangente y arco cotangente, respectivamente, así:

$$\begin{array}{l} \arctan : R \to \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ y \mapsto x = \arctan y \end{array} , \text{ y } \begin{array}{l} arc\cot : R \to]0, \pi[\\ y \mapsto x = arc\cot y \end{array}$$

Representación gráfica de $y = \arctan x$



Observaciones

1. $\arctan(\tan x) = x, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

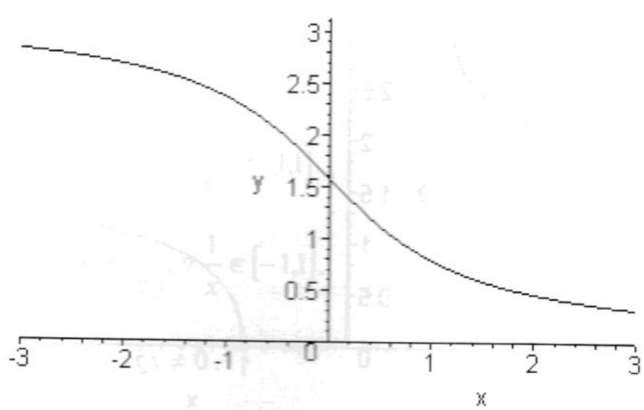
2. $\tan(\arctan y) = y, \forall y \in R$.

Propiedades

1. $sen(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in R$.

2. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in R$.

Representación gráfica de $y = arc\cot x$



Observaciones

1. $arc\cot(\cot x) = x, \forall x \in \left]0, \pi\right[$.
2. $\cot(arc\cot y) = y, \forall y \in R$.

Propiedades

1. $\cot(\arctan x) = \dfrac{1}{x}$, si $x \neq 0$.
2. $\tan(arc\cot x) = \dfrac{1}{x}$, si $x \neq 0$.

FUNCIONES SECANTE Y COSECANTE INVERSAS

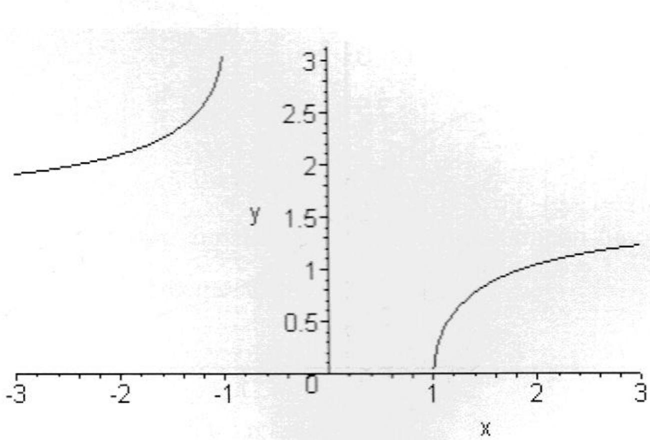
DEFINICION

Las funciones $\begin{array}{l} \sec : [0, \pi] \to R - \left]-1,1\right[\\ x \mapsto y = \sec x \end{array}$, y $\begin{array}{l} \csc : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to R - \left]-1,1\right[\\ x \mapsto y = \csc x \end{array}$

son funciones biyectivas y sus funciones inversas se denominan función arco secante y arco cosecante, respectivamente, así:

$\begin{array}{l} arc\sec : R - \left]-1,1\right[\to [0, \pi] \\ y \mapsto x = arc\sec y \end{array}$, y $\begin{array}{l} arc\csc : R - \left]-1,1\right[\to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ y \mapsto x = arc\sec y \end{array}$

Representación gráfica de $y = arc\sec x$



Observaciones

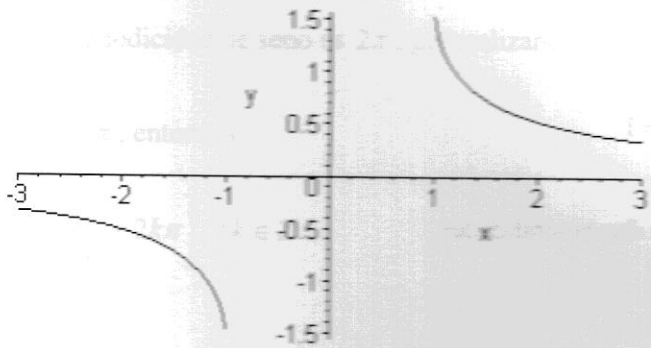
1. $arc\sec(\sec x) = x, \forall x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

2. $\sec(arc\sec y) = y, \forall y \in R -]-1,1[$.

Propiedad

1. $\tan(arc\sec x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Representación gráfica de $y = arc\csc x$



Observaciones

1. $arc\csc(\csc x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

2. $\csc(arc\csc y) = y, \forall y \in R -]-1,1[$.

Propiedades

1. $arc\cot x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

2. $arc\sec x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right), \forall \frac{1}{x} \in [-1,1]$.

3. $arc\csc x = arcsen\left(\frac{1}{x}\right), \forall \frac{1}{x} \in [-1,1]$.

4. $\sec(\arccos x) = \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$.

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Una ecuación trigonométrica es una igualdad que es verdadera para determinados valores de la incógnita. Para resolver una ecuación trigonométrica se debe establecer un dominio como $[-\pi, \pi]$. La solución se generaliza considerando la periodicidad de la función trigonométrica comprendida.

Ejemplo

Resolver

$senx.\tan x = senx, \forall x \in R$

Solución:

$senx.\tan x - senx = 0$

$senx.(\tan x - 1) = 0$

$senx = 0 \vee \tan x = 1$

Se consideran las dos posibilidades

a) $senx = 0$

$x = 0 + k\pi$

$x = k\pi$

b) $\tan x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$Sol: \forall x \in \{k\pi\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}; \forall k \in Z$

INECUACIONES TRIGONOMETRICAS

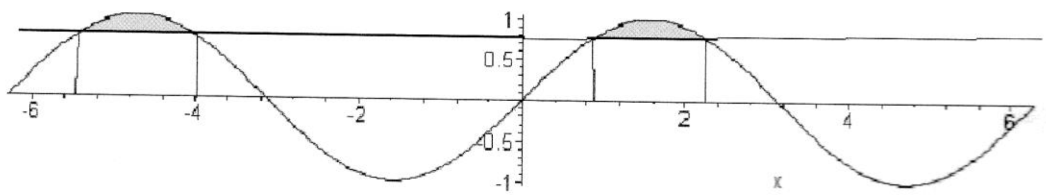
Una inecuación trigonométrica es una desigualdad que es verdadera para determinados valores de la incógnita. Para resolver una inecuación trigonométrica se debe establecer un dominio como $[-\pi, \pi]$. La solución se generaliza considerando la periodicidad de la función trigonométrica comprendida.

Ejemplo

Resolver

$$senx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solución:



$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, pero la periodicidad de seno es 2π, generalizando

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, entonces

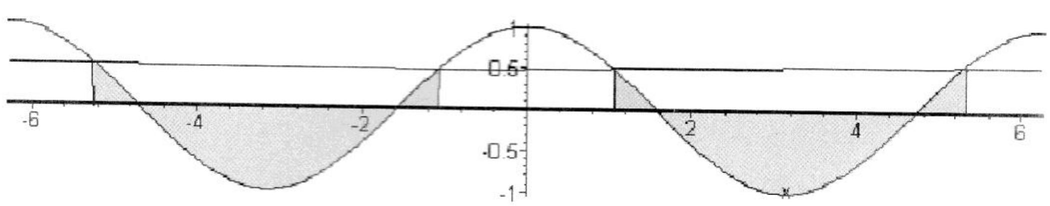
$$Sol : \forall x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]; \forall k \in Z$$

Ejemplo

Resolver

$$\cos x < \frac{1}{2}$$

Solución:



$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$Sol : \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[; \forall k \in Z$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Demostrar que

$$\frac{sen(5x)+sen(3x)}{2sen(x)\cos^3(x)-2sen^3(x)\cos(x)}=4\cos(x)$$

2. Demostrar que

$$2(1-\cos^2 x)(\csc^2 x-1)=1+\cos 2x$$

3. Demostrar que

$$\frac{2\cos^2 x - 1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) sen^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = 1$$

4. Demostrar que

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - \tan(\pi - x).\cos(8\pi + x) + 2} = \frac{2senx - 1}{2senx}$$

5. Demostrar que

$$\left(1-\tan\frac{x}{2}\right).\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{senx+\cos x+1}{1+\cos x}$$

6. Demostrar que

$$1-\left(sen\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-\tan\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}$$

7. Hallar el valor exacto de

$$E = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \tan\left(\frac{x}{2}\right),\ senx = \frac{-1}{3} \wedge \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$$

8. Hallar el valor exacto de

$$E = \frac{\sec\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi - x}{2}\right) + \cos(2x - 3\pi)},\ si\ |\tan x| = 1 \wedge \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

9. Hallar el valor exacto de

$$E = \frac{\tan 2x + \csc\dfrac{x}{2}}{1 + sen2x}, \text{ si } \cos x = -\frac{3}{4} \wedge \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

10. Resolver

$$sen(x)sen(7x) = sen(3x)sen(5x)$$

11. Resolver

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{sen^2 x - 2senx}, \quad x \in [0,2\pi]$$

12. Resolver

$$\sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)} \geq -1$$

13. Resolver

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3\cos^2 x - \frac{5}{2}$$

14. Resolver

$$\cos^4(x) - sen^4(x) + sen[-2\arctan(1)] = 0$$

15. Resolver

$$4\cos(2x).sen(2x) + 6\cos(2x) = -2sen(2x) - 3$$

16. Resolver

$$\left|\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| > \sqrt{3}\text{, si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} - \{0\}$$

17. Resolver

$$sen(2x) - \cos(x) < 0$$

18. Resolver

$$arcsen[sen(x^2 - 1)] = x^2 - 1$$

19. Resolver

$$|sen(2x) - 1| \leq 1,\ si\ \ x > 0 \wedge \frac{x + \pi}{x\text{-}\pi} < 1$$

20. Resolver

$$\frac{2\cos^2(2x)+\cos(2x)-1}{sen(2x)+2}\leq 0$$

21. Resolver

$$\tan x+2\leq\frac{sen2x}{1+\cos 2x}$$

22. Resolver

$$\sqrt{3 + 2\tan x - \tan^2 x} \geq \frac{1 + \tan x}{2}$$

23. Resolver

$$\left|\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| > \sqrt{3}\,,\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$$

24. Resolver

$$\left|sen^2x + 3senx\right| \geq 2sen^2x$$

25. Resolver

$$\arccos\left(\frac{2}{1-x^2}\right) \geq arcsen(1)$$

26. Resolver

$$\arccos\left(\sqrt{3}x\right) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

27. Determinar el dominio de f

$$f(x) = arcsen\left(\sqrt{1 - x^2 - x}\right)$$

28. Sean las funciones

$f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x}\right)$, si $x<\frac{1}{2}$ $\qquad$ $g(x)=sen(x)$, si $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Hallar fog y su dominio.

29. Determinar los valores de $x\in[0,2\pi]$ para que f sea función

$$f(x)=\sqrt{\frac{\cos x\left(\csc^2 x-\cos^2 x-sen^2 x\right)}{\cot x}}$$

30. Determinar el dominio de f

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{|x+1| - 3x}{arcsen(x) - \pi}\right]$$

31. Determinar la monotonía de

$$f(x) = 2\cos^2(2x) - \cos(2x) - 1, \text{ si } x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

32. Determinar el dominio y la monotonía de f

$$f(x) = \ln(sen2x) - \ln(2senx)$$

33. Hallar los valores de a y b para que se cumpla la siguiente igualdad

$$a + bi = \frac{z - (1 + i)}{(\bar{z})^2}\ \text{, si}\ z = e^{\frac{1}{\log_2 e}} - i[\cos(\arctan 0)]$$

34. Analizar la monotonía de f

$$f(x) = sen(x) - \cos(x)\text{, si } x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$